TUGAS AKHIR - SM 141501

PENERAPAN METODE *BAYES* DALAM MENENTUKAN MODEL ESTIMASI RELIABILITAS POMPA *SUBMERSIBLE* PADA RUMAH POMPA WENDIT I PDAM KOTA MALANG

WIDYA ARRYA SEPTIANA
NRP 1213 100 004

Dosen Pembimbing
DrS. Soehardjoepri, M. Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2017

TUGAS AKHIR - SM 141501

PENERAPAN METODE *BAYES* DALAM MENENTUKAN MODEL ESTIMASI RELIABILITAS POMPA *SUBMERSIBLE* PADA RUMAH POMPA WENDIT I PDAM KOTA MALANG

WIDYA ARRYA SEPTIANA
NRP 1213 100 004

Dosen Pembimbing
Drs. Soehardjoepri, M. Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2017

FINAL PROJECT - SM 141501

APPLICATION OF BAYES METHOD TO DETERMINE RELIABILITY ESTIMATION MODEL OF SUBMERSIBLE PUMP'S AT HOUSE OF PUMP WENDIT I PDAM KOTA MALANG

WIDYA ARRYA SEPTIANA
NRP 1213 100 004

Supervisor
Drs. Soehardjoepri, M. Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya
2017

LEMBAR PENGESAHAN

PENERAPAN METODE *BAYES* DALAM MENENTUKAN MODEL ESTIMASI RELIABILITAS POMPA *SUBMERSIBLE* PADA RUMAH POMPA WENDIT I PDAM KOTA MALANG

APPLICATION OF BAYES METHOD TO DETERMINE RELIABILITY ESTIMATION MODEL OF SUBMERSIBLE PUMP'S AT HOUSE OF PUMP WENDIT I PDAM KOTA MALANG

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
WIDYA ARRYA SEPTIANA
NRP. 1213 100 004

Menyetujui,
Dosen Pembimbing

Drs. Soehardjoepri, M.Si
NIP. 19620504 198701 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMIPA-ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2017

PENERAPAN METODE *BAYES* DALAM MENENTUKAN MODEL ESTIMASI RELIABILITAS POMPA *SUBMERSIBLE* PADA RUMAH POMPA WENDIT I PDAM KOTA MALANG

Nama	**: Widya Arrya Septianan**
NRP	**: 1213 100 004**
Jurusan	**: Matematika FMIPA-ITS**
Dosen Pembimbing	**: Drs. Soehardjoepri, M. Si**

ABSTRAK

Pemeliharaan sistem dan peralatan–peralatan dalam suatu perusahaan merupakan salah satu faktor penting dalam mendukung produktivitas dan kualitas produk yang baik. Pemeliharaan peralatan produksi dengan melakukan kontrol keandalan (reliabilitas) dapat mengurangi gangguan pada sistem produksi sehingga mampu mengoptimalkan pendapatan keuntungan bagi perusahaan. PDAM (Perusahaan Daerah Air Minum) Kota Malang, selaku penyedia layanan air bersih sering kali menemui kendala dalam proses produksi air akibat kerusakan pada pompa *submersible,* sehingga mengalami kerugian yang cukup besar. Sebagai upaya mengurangi kerugian dengan mencegah kerusakan pompa *submersible,* PDAM Kota Malang perlu untuk mengetahui nilai reliabilitas pompa untuk menjadwalkan waktu pemeliharaan dengan tepat. Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan nilai reliabilitas dari model estimasi relibilitas dengan metode *Bayes* menggunakan distribusi terbaik. Data yang digunakan adalah data waktu antar waktu kerusakan pompa *submersible* pada Rumah Pompa Wendit I PDAM Kota Malang. Model yang diperoleh diterapkan untuk mendapatkan nilai reliabilitas pompa yaitu nilai reliabilitas Pompa I adalah 0.4030, Pompa II adalah 0.69464 dan Pompa III adalah 0.7701. Sedangkan nilai reliabilitas untuk sitem perpompaan pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah 0.9581.

Kata Kunci : *Metode Bayes, Pompa Submersible, Reliabilitas.*

APPLICATION OF BAYES METHOD TO DETERMINE RELIABILITY ESTIMATION MODEL OF SUBMERSIBLE PUMP'S AT HAUSE OF PUMP WENDIT I PDAM KOTA MALANG

Name	***: Widya Arrya Septianan***
NRP	***: 1213 100 004***
Department	***: Matematika FMIPA-ITS***
Supervisor	***: Drs. Soehardjoepri, M. Si***

ABSRACT

Maintening system and equipment maintenance is one of important factor for a company to supporting productivity and increasing quality product. Maintenance of production equipment by controlling reliability (reliability) can reduce interference in the production system to optimize the company advantages. PDAM Kota Malang as a provider of water services often get problem in production clean water. It happens because of decreasing performance and there is something trouble with submersible pump. As an effort to reduce losses by preventing submersible pump demage, PDAM Kota Malang needs to know the reliability value of pumps by using model estimation of reliability. This research was conduct to obtain estimation reliability model by Bayes method using Weibull distribution and Lognormal distribution. This research use data of time between demage time of submersible pump at Wendit I Hause of Pump PDAM Kota Malang. Based on data processing that have been done, the reliability model by using best distributioan.Model reliability is use to determine reliability value of submerble pum that is for Pump I the reliabikity value is 0.403, Pump II is 0.69464 and Pump III 0.9581. Then, for rliability system submersible pump Wendit I PDAM Kota Malang is 0.9581. The result of this research is expected to be an alternative and *consideration for PDAM Kota Malang to determining he schedule of maintenance.*

Key Words : *Bayes Method, Submersible Pump, Reliability*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena berkat ridha -Nya penelitian Tugas Akhir ini dapat terselesaikan. Terimakasih yang tidak terhingga saya ucapkan kepada kedua orang tua saya, Bapak Heri Winarno dan Ibu Yuli Artatik sebagai motivasi terbesar saya untuk tidak menyerah dalam ikhtiar dan mencari ilmu, yang tidak pernah putus memberikan doa-doa terbaiknya untuk saya, yang seantiasa mendukung dengan penuh kasih sayang secara moril maupun materil.

Terimakasih sebesar – besarnya kepada Drs. Soehardjoepri, M.Si selaku dosen pembimbing saya. Sungguh sangat berkesan bagi saya dapat dibimbing oleh beliau, yang senantiasa menuntun dengan sabar dan bersedit berbagi ilmu untuk menunjang Tugas Akhir ini, serta termakasih atas ilmu agama yang selalu beliau selipkan dalam kegiatan bimbingan kami. Terimakasih juga saya ucapkan kepada Valeriana Lukitosari, S.Si, MT, Endah Rokhmati Merdika Puteri Ph.D, Dra. Farida Agustini Widjajati, M.Si dan Dr. Hariyanto, M.Si atas segala kritikan membangun serta saran yang sangat berarti bagi saya.

Terimakasih sedalam – dalamnya bagi orang –orang terdekat saya yang langsung maupun tidak secara langsung membantu dalam kelancaran Tugas Akhir saya ini. Teruntuk Laras, Amel, Elak, Lintang, Dina, Reny, Rizki, Bagas, Egan, Rofiqoh, Fina, Chyntia, Eka Putri, Chusnul dan Dhana yang dengan hangatnya menerima keluh kesah saya dalam menjalani semester akhir ini. Tidak lupa terimakasih saya ucapkan kepada pihak PDAM Kota Malang atas informasi terkait data pendukung Tugas Akhir ini.

Surabaya, Mei 2017

Widya Arrya Septiana

DAFTAR ISI

Hal

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Hal

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

t	: Waktu kerusakan
t_i	: Waktu antar waktu kerusakan ke i,
n	: Banyaknya data
$F(t)$	: Fungsi kumulatif dari t,
Pr $(T \geq t)$	: Peluang suatu sistem berfungsi di atas periode waktu t,
$f(t)$	: Fungsi padat peluang dari t,
$\lambda(t)$	: Fungsi Hazard dari distribusi tertentu,
$L(\theta\|\mathrm{T})$	: Fungsi *Likelihood* dengan parameter θ terhadap variable acak T,
I(θ)	: Informasi fisher,
$\pi(\theta)$	: Distribusi Prior dengan parameter θ,
$\pi(\theta_1, \theta_2\|T)$	: Distribusi posterior dengan parameter θ_1 dan θ_2 terhadap variable acak T,
$\Gamma(z)$	: Fungsi gamma,
$B(\alpha, \beta)$	: Fungsi beta
$R(t)$	: Fungsi reliabilitas
$R(t)^*$	: Estimasi Reliabilitas
r	: *Nilai Index of Fit*

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Perusahaan yang bergerak di bidang jasa maupun produksi produk sangat memperhatikan kualitas pelayanan dan kualitas produk untuk memuaskan pelanggan demi mendapat keuntungan yang memungkinkan [1]. Salah satu faktor yang memiliki potensi besar dalam meningkatkan produktivitas dan profitabilitas yang optimal adalah membentuk manajemen pemeliharaan yang tepat [2]. Pemeliharaan sistem dan pemeliharaan peralatan–peralatan dalam suatu perusahaan merupakan salah satu faktor penting dalam mendukung produktivitas produk dan peningkatan kualitas produk yang mampu bersaing di pasaran. Keandalan (reliabilitas) peralatan-peralatan yang dimiliki perusahaan perlu dikontrol untuk mengantisipasi terganggunya sistem [3]. Pemeliharaan peralatan produksi dengan melakukan kontrol keandalan (reliabilitas) dapat mengurangi gangguan pada sistem produksi sehingga mampu mengoptimalkan pendapatan keuntungan bagi perusahaan [1].

PDAM Kota Malang merupakan salah satu perusahaan milik daerah yang mempunyai peran penting dalam melaksanakan pengelolahan dan memberikan pelayanan air bersih untuk meningkatkan kesajahteraan masyarakat kota Malang. PDAM kota Malang hampir setiap bulan mengalami gangguan pada pompa air baku sehingga mengakibatkan kerugian yang cukup besar. Pompa air baku merupakan salah satu komponen penting dalam proses produksi air bersih PDAM. Pompa air baku PDAM berperan memompa air menuju bangunan intake untuk didistribusikan melalui pipa transmisi dan pipa distribusi yang selanjutnya akan disalurkan ke rumah – rumah pelanggan [4]. Seperti yang pernah terjadi pada tahun 2010, di mana hampir 12 pompa yang tersebar pada rumah pompa Wendit yaitu Wendit I, Wendit II dan Wendit III mengalami kerusakan secara bersamaan sehingga mengakibatkan terhentinya distribusi air kepada pelanggan selama 5 hari [5]. Hal ini diakibatkan oleh kerusakan mesin pompa akibat pemeliharaan yang terlambat. Sistem pemeliharaan yang dilakukan oleh PDAM Kota Malang saat ini adalah *preventive maintenance.* Oleh karena itu, sebelum dilakukan penjadwalan pemeliharaan, PDAM Kota Malang perlu untuk mengetahui nilai reliabilitas dari pompa *submersible* agar dapat mencegah terjadinya kerugian PDAM akibat kerusakan pompa. Penelitian Tugas Akhir ini dilakukan untuk mengetahui model estimasi reliabilitas guna mendapatkan nilai reliabiltas pompa *submersible*.

Penelitian Tugas Akhir ini membahas mengenai estimasi reliabilitas pompa *submersible* dengan metode *Bayes*. Penelitian mengenai estimasi parameter distribusi Weibull dan distribusi Lognormal menggunakan metode *Bayes* sudah banyak dilakukan, namun tidak banyak penelitian mengenai estimasi reliabilitas menggunakan kedua distribusi tersebut dengan metode *Bayes*. Beberapa penelitian mengenai estimasi parameter telah dilakukan oleh Adel (2014) dan Evi (2016). Devi Murni Adel (2014) telah melakukan estimasi parameter distribusi Weibull dan estimasi reliabilitas distribusi Weibull dengan menggunakan metode *Bayes*. Pada penelitiannya, Adel (2014) belum dapat memodelkan estimasi parameter dan estimasi reliabilitas distribusi Weibull dalam bentuk persamaan yang sederhana [6]. Selain itu, Evi Noor Diana (2016) juga telah melakukan penelitian mengenai estimasi parameter distribusi Lognormal menggunakan metode *Bayes*. Penelitian tersebut membahas mengenai estimasi parameter pada Lognormal dengan distribusi prior non informatif menggunakan estimasi *Bayes* [7]. Berdasarkan hasil dari penelitian-penelitian sebelumnya, dalam penelitian ini akan didapatkan model estimasi reliabilitas distribusi Weibull dan model estimasi reliabilitas distribusi Lognormal dengan metode *Bayes*.

Pada penelitian ini akan dilakukan *Index of Fit* dan *Goodness of Fit* untuk menentukan penggunaan distribusi terbaik dalam mengestimasi reliabilitas pompa *submersible* air baku. Distribusi yang digunakan dalam menentukan model estimasi reliabilitas dengan metode *Bayes* dalam penelitian ini adalah distribusi Weibull dan distribusi Lognormal. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang fleksibel dan termasuk parameter yang tepat untuk dipilih dalam memodelkan beragam tipe perilaku nilai kerusakan, sedangkan distribusi Lognormal banyak digunakan dalam menentukan waktu pemeliharaan, serta memiliki peran yang lebih baik dibandingkan distribusi normal mengenai masalah distribusi kerusakan [8]. Charles E. Ebeling (1996) juga menyatakan bahwa seperti distribusi Weibull, distribusi Lognormal dapat digunakan dalam beberapa bentuk variasi. Sering kali data yang terdistribusi Weibull juga akan terdistribusi Lognormal [8]. Model estimasi reliabilitas yang digunakan dalam mencari nilai reliabilitas sebagai salah satu output dari penelitian Tugas Akhir ini, diharapkan dapat menjadi bahan pertimbangan PDAM Kota Malang dalam menentukan waktu pemeliharaan maupun waktu pergantian pompa *submersible* PDAM Kota Malang.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, disusun suatu permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Bagaimana model estimasi reliabilitas berdasarkan distribusi Weibull dan distribusi Lognormal dengan metode *Bayes*.
2. Bagaimana hasil estimasi reliabilitas pompa *submersible* PDAM Kota Malang.

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Peluang distribusi yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah distribusi Weibull dua parameter dan distribusi Lognormal.
2. Distribusi prior yang digunakan adalah distribusi prior non informatif dengan Jeffrey nilainya diperoleh dari pendekatan Informasi Fisher satu dimensi.
3. Data yang digunakan adalah data sekunder dengan variabel waktu antar waktu kerusakan pompa *submersible* pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang dari Januari 2008 hingga Februari 2017.
4. Terdapat 4 pompa air baku, dikarenakan PDAM Kota Malang hanya menggunakan 3 pompa, sehingga dalam penelitian ini digunakan data waktu antar waktu kerusakan gabungan yang diasumsikan menjadi data waktu antar waktu kerusakan 3 pompa.
5. Nilai reliabilitas pompa yang ditentukan dalam penelitian ini adalah nilai reliabilitas pompa pada tanggal 15 Maret 2017.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dilakukannya penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan model estimasi reliabilitas berdasarkan distribusi Weibull dan distribusi Lognormal dengan metode *Bayes*.
2. Mendapatkan hasil estimasi reliabilitas pompa *submersible* PDAM Kota Malang.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memberi manfaat sebagai berikut :

1. Memberikan informasi metode dalam mendapatkan nilai reliabilitas (keandalan) bagi pihak perusahaan sebagai acuan alternatif dalam menentukan waktu pemeliharaan pompa untuk mengurangi risiko kerusakan komponen produksi air PDAM Kota Malang.
2. Menyokong data yang mendasari pihak perusahaan dalam melakukan evaluasi dan perbaikan maupun pergantian komponen distribusi air PDAM Kota Malang.
3. Memberikan informasi model estimasi reliabilitas menggunakan distribusi Weibull dan distribusi Lognormal dengan pendekatan metode *Bayes*.

1.6 Sistematika Penelitian

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, persamaan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan pada Tugas Akhir.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Menjelaskan dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir. Pada bab ini berisi tentang pengertian dan bentuk umum reliabilitas, metode estimasi dengan *Bayes* dan beberapa uji kecocokan data.

BAB III METODOLOGI TUGAS AKHIR

Menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir. Gambaran umum mendapatkan model terbaik dalam estimasi reliablitas menggunakan metode *Bayes*.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Menyajikan tentang analisa data dan pembahasan dalam pembentukan model estimasi reliabilitas menggunakan metode *Bayes*.

BAB V KESIMPULAN

Berisi kesimpulan dari hasil analisis dalam Tugas Akhir ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas mengenai teori-teori yang mendukung dalam proses penyelesaian permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Teori – teori yang digunakan adalah mengenai komponen pada sistem produksi dan distribusi air PDAM Kota Malang dan teori – teori yang mendukung dalam mendapatkan model estimasi reliabilitas komponen sistem produksi dan distribusi air PDAM Kota Malang.

2.1 Profil PDAM Kota Malang

Sistem penyediaan air bersih di Kota Malang telah berdiri sejak pemerintahan Belanda dan kegiatan penyediaan air minum untuk kota Malang dimulai sejak tanggal 31 Maret 1915, yang kemudian ketentuan persediaan air minum tersebut dikenal dengan nama *Waterleiding Verordening* Kota Malang. Pada tanggal 18 Desember 1974 dengan diterbitkannya Peraturan Daerah Nomor 11 Tahun 1974, Unit Air Minum berubah dengan status Perusahaan Daerah Air Minum. Sejak saat itu Perusahaan Daerah Air Minum Kotamadya Malang mempunyai status Badan Hukum dan mempunyai hak otonomi dalam pengelolaan air minum. Seiring dengan berkembangnya Kota Malang yang tentunya memicu pertambahan jumlah penduduk Kota Malang mengakibatkan meningkat pula kebutuhan air bersih, sehingga untuk memenuhi dan demi menjaga kelangsungan pelayanan air pada konsumen selama 24 jam secara terus menerus, PDAM Kota Malang menambah kapasitas produksi dengan mengelola Sumber Air Wendit yang berada di wilayah Kabupaten Malang dan beberapa mata air di Kota dan Kabupaten Malang dengan menggunakan sistem pompanisasi [9].

Saat ini PDAM Kota Malang tengah melayani lebih dari 150.000 pelanggan yang mencakup 80 % dari jumlah penduduk Kota Malang yang setara dengan 843.858 jiwa. Pelayanan air bersih telah menjangkau wilayah 80% dari luas wilayah Kota Malang, lebih kurang 110 km^2 [9].

2.2 Penelitian Terdahulu

Terdapat beberapa penelitian mengenai estimasi reliabilitas dan estimasi parameter dengan metode *Bayes* yang telah dilakukan. Seperti pada penelitian yang dilakukan oleh Adevi Murni Adel dalam jurnalnya yang berjudul Estimasi Reliabilitas Pada Distribusi Weibull Dengan Metode *Bayes*. Adel (2014) dalam penelitiannya telah melakukan estimasi parameter waibull dan estimasi reliabilitas dengan distribusi Weibull menggunakan metode *Bayes* [6]. Pada penelitian ini Adel (2014) menghasilkan model estimasi reliabilitas distribusi Weibull di mana model tersebut masih berupa persamaan yang kompleks.

$$R(t)^* = \frac{\int_0^\infty \frac{\beta^{n+1}\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1}}{\left(\sum_{i=1}^n {t_i}^\beta + t^\beta\right)^n} d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1}}{\left(\sum_{i=1}^n {t_i}^\beta\right)^n} d\beta}$$

Evi Noor Diana dan Soehardjoepri (2016) telah melakukan penelitian yang berjudul Pendekatan Metode *Bayes* untuk Kajian Estimasi Parameter Distribusi Lognormal untuk Non Informatif Prior. Pada penelitiannya, Evi (2016) telah melakukan estimasi parameter distribusi Lognormal menggunakan metode *Bayes*. Hasil dari penelitian tersebut berupa estimasi parameter μ dari distribusi Lognormal serta distribusi posterior marginal parameter σ^2 yaitu:

a. Estimasi Parameter μ

$$\mu * = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln t_i}{n} \tag{2.1}$$

b. Distribusi Posterior Marginal Parameter σ^2

$$\pi(\sigma^2|t_i) = \frac{e^{-\frac{\beta}{2\sigma^2}}}{2\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \tag{2.2}$$

2.3 Fungsi Reliabilitas

Reliabilitas adalah kemampuan suatu item untuk menjalankan fungsi tertentu yang diberi oleh lingkungan dan kondisi operasional dalam kurun waktu tertentu. Suatu item disini didefinisikan sebagai komponen, subsistem atau sistem yang dapat dianggap sebagai entitas [10]. Sumber lain mendefinisikan bahwa reliabilitas adalah peluang sebuah komponen atau suatu sistem bekerja sesuai fungsinya pada jangka waktu tertentu ketika digunakan dibawah kondisi operasional tertentu [8]. Jika diberikan t' merupakan waktu kerusakan, maka fungsi reliabilitasnya $\left(R(t)\right)$ sebagai berikut:

$$R(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t) \text{ untuk } t > 0 \tag{2.3}$$

$$R(t) = e^{\left(-\int_0^t \lambda(t')dt'\right)} \tag{2.4}$$

dengan,

$F(t)$: Fungsi kumulatif dari t,

$\Pr(T \geq t)$: Peluang suatu sistem berfungsi di atas periode waktu t,

$f(t)$: Fungsi padat peluangdari t.

$\lambda(t')$: Fungsi Hazard dari distribusi tertentu

Berdasarkan intensitas kerusakannya, distribusi probabilistik yang digunakan dalam menentukan nilai reliabilitas dibagi menjadi dua, yaitu model nilai kerusakan konstan dan model nilai kerusakan tidak konstan. Distribusi eksponensial adalah salah satu distribusi reliabilitas yang penting dan sederhana dalam menganalisis laju kerusakan yang konstan dan independen [8].

Distribusi peluang yang digunakan dalam menganalisa proses kerusakan kontinu yaitu distribusi Weibull, normal dan Lognormal. Distribusi tersebut memiliki fungsi nilai kerusakan yang tidak konstan sepanjang waktu tertentu [8]. Distribusi peluang yang digunakan dalam penelitian ini adalah distribusi eksponensial, distribusi Weibull dan distribusi Lognormal, sehingga berikut ini adalah fungsi reliabilitas dari distribusi eksponensial, distribusi Weibull dan distribusi Lognormal.

a. Distribusi Eksponensial

Sebuah variabel acak T dikatakan sebagai variabel acak eskponensial dengan parameter λ jika fungsi peluang kepadatannya sebagai berikut :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} & ;\ \text{jika } 0 < t < \infty \\ 0 & ;\ \text{t yang lain} \end{cases} \tag{2.5}$$

Jika t merupakan waktu kerusakan, maka fungsi keandalannya $\left(R(t)\right)$ sebagai berikut:

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \tag{2.6}$$

Bukti:

Diketahui bahwa fungsi hazard dari distribusi eksponensial adalah $\lambda(t') = \lambda$, dengan menggunakan persamaan reliabilitas (2.4) diperoleh:

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left[-\int_0^t \lambda dt'\right] \\ &= \exp[-\lambda t] \end{aligned}$$

dengan,

$\lambda(t')$: Fungsi Hazard dari distribusi tertentu

λ : Parameter distribusi eksponensial

b. Distribusi Weibull

Peluang distribusi Weibull merupakan perluasan dari distribusi gamma. Distribusi Weibull juga sering disebut *unified distribution* [11]. Distribusi Weibull mulai dikenal luas setelah seorang profesor dari Swedia yang bernama Waloddi Weibull (1887-1979) mengembangkan distribusi ini untuk model kekuatan dari beberapa material [12]. Jika diberikan parameter bentuk θ dan parameter lokasi β serta t adalah waktu kerusakan maka fungsi padat peluang$\left(f(t)\right)$ distribusi Weibull sebagai berikut :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta} t^{\beta-1} e^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}} & ;\ \text{jika } 0 < t < \infty \\ 0 & ;\ \text{t yang lain} \end{cases} \tag{2.7}$$

Jika t merupakan waktu kerusakan, maka fungsi keandalannya $\left(R(t)\right)$ sebagai berikut:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \tag{2.8}$$

Bukti:

Diketahui bahwa fungsi hazard dari distribusi Weibull adalah $\lambda(t') = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}$, dengan menggunakan persamaan reliabilitas (2.4) diperoleh:

$$R(t) = \exp\left[-\int_{0}^{t} \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t'}{\theta}\right)^{\beta-1} dt'\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_{0}^{t} (t')^{\beta-1} dt'\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{\beta}{\theta^\beta}\left(\frac{1}{\beta}(t')^\beta\right)_0^t\right]$$
$$= \exp\left[-\frac{(t)^\beta}{\theta^\beta}\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right]$$

dengan,
$\lambda(t')$: Fungsi Hazard dari distribusi tertentu.

c. Distribusi Lognormal

Teori mengenai distribusi Lognormal diinisiasi oleh Galton dan McAlster pada tahun 1879. Mereka menemukan distribusi ini ketika mempelajari tentang rata – rata geometri sebagai sebuah estimasi lokasi. Kapteyn (1903) berdiskusi tentang permulaan dari distribusi ini. Distribusi ini merupakan distribusi yang variabel acaknya terdistribusi normal dimana variabel acak tersebut berbentuk $\ln t$ [11]. Sebuah variabel acak T berdistribusi Lognormal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 serta t adalah waktu kerusakan mesin sehingga fungsi padat peluang$\big(f(t)\big)$ distribusi Lognormal sebagai berikut :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2} & ;\ \text{jika } 0 < t < \infty \\ 0 & ;\ t \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.9)$$

Waktu kerusakan T dari sebuah item dikatakan terdistribusi Lognormal dengan parameter rata - rata μ dan parameter bentuk σ^2. Fungsi reliabilitas distribusi Lognormal untuk t merupakan waktu kerusakan sebagai berikut [10]:

$$R(t) = \phi\left(\frac{\mu - \ln(t)}{\sigma}\right); \quad (2.10)$$

dengan,
μ : Rata-rata dari t,
σ^2 : Varian dari t,

σ : Simpangan baku dari ,

$\phi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)$: Nilai wilayah di bawah kurva Normal,

π : Konstanta matematika dengan nilai 3.14.

Bukti:

Fungsi padat peluang dari distribusi Lognormal pada (2.9) disubsitusikan pada persamaan reliabilitas (2.4). Oleh karena itu perlu dicari terlebih dahulu fungsi kumulatif dari distribusi Lognormal.

misalkan:

$$\frac{\ln(T) - \mu}{\sigma} = Z$$

$$\ln(T) - \mu = \sigma z$$

$$\ln(T) = \sigma z + \mu$$

$$T = e^{\sigma z + \mu}$$

$$\frac{1}{T\sigma} dt = dz \rightarrow dt = \sigma e^{\sigma z + \mu} dz$$

Batas atas dan bawahnya tetap

$$t = 0 \rightarrow z = 0$$

$$t = t \rightarrow z = t$$

fungsi kumulatif yang diperoleh :

$$F(z) = \Pr(Z \leq z)$$

$$= \Pr\left(\frac{\ln(T) - \mu}{\sigma} \leq z\right)$$

$$= \Pr(\mathrm{T} \leq e^{\sigma z + \mu})$$

$$= \int_0^{Z = Z_p} \frac{1}{e^{\sigma z + \mu} \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2} \sigma e^{\sigma z + \mu} dz$$

$$= \int_0^{\frac{\ln\left(\sigma e^{\sigma Z_p + \mu}\right) - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2} dz$$

Diperoleh :

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \Pr(T > t) \\
&= \Pr\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} < \frac{\ln(T) - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \phi\left(\frac{\mu - \ln(t)}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Metode analisis reliabilitas yang telah dijelaskan sebelumnya digunakan untuk mendapatkan nilai reliabilitas dari item yang *nonrepairable*. Mohammad Modarres, Kamisky dan Krivtsov (1999) dalam bukunya menyatakan bahwa salah satu cara untuk memperoleh nilai reliabilitas dari item yang *repairable* adalah dengan menganalisis data statistik menggunakan pendekatan estimasi klasik maupun estimasi *Bayes* [13]. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan estimasi *Bayes*. Estimasi reliabilitas $(R(t)^*)$ dengan metode *Bayes* pada distribusi tertentu dengan parameter θ_1 dan θ_2 didefinisikan sebagai [14]:

$$R(t)^* = E(R(t)|T) = \iint R(t)\, \pi(\theta_1, \theta_2\, |T) d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.11)$$

dengan,

$E(R(t)|T)$: Nilai ekspektasi atas T dengan syarat $R(t)$,

$R(t)$: Fungsi reliabilitas distribusi peluang tertentu,

$\pi(\theta_1, \theta_2|T)$: Distribusi posterior parameter $\theta_1$dan θ_2.

2.4 Reliabilitas Sistem dengan Konfigurasi Parallel

Dua atau lebih komponen dalam sistem dikatakan terkonfiguarasi paralel apabila kerja satu komponen tidak mempengaruhi komponen yang lain. Jika satu komponen mengalami kerusakan, komponen lain tetap berjalan. Konfigurasi komponen secara paralel digambarkan pada Gambar 2.1.

Reliabilitas sistem dengan konfigurasi paralel memiliki persamaan sebagai berikut [8]:

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\big(1 - R_i(t)\big)\ ; 0 < i \leq n \qquad (2.12)$$

di mana,
$R_i(t)$: Nilai reliabilitas komponen ke – i

Bukti:

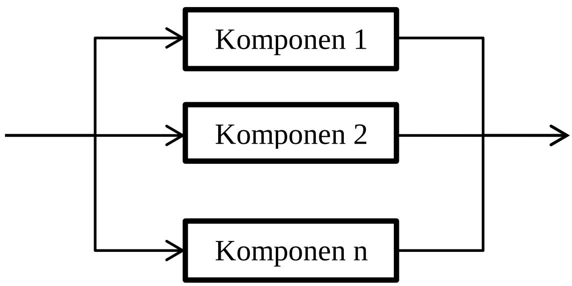
Jika E_i : Kejadian komponen i berjalan sesuai fungsinya
$P(E_i)$: Peluang komponen i berjalan sesuai fungsinya
$R_i(t)$: Nilai reliabilitas dari komponen i
Sehingga nilai reliabilitas suatu sistem parallel adalah

$$R_s = P(E_1 \cup E_2) = 1 - P(E_1 \cup E_2)^c$$

$$= 1 - P({E_1}^c \cap {E_2}^c)$$

$$= 1 - (1 - R_1)(1 - R_2)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}\big(1 - R_i(t)\big)$$



Gambar 2. 1 Blog Diagram untuk Reliabilitas Komponen Dalam Sistem Paralel

2.5 Metode *Bayes*

Sebuah model statistik *Bayes* terbentuk dari parameter model statistik $f(t|\theta)$ dan distribusi prior $\pi(\theta)$. Secara umum peluang dengan menggunakan teorema *Bayes* dideskripsikan dengan keadaan jika A dan E adalah kejadian di mana $P\ (E) \neq 0$, $P(A|E)$ dan $P(E|A)$ saling berhubungan. Berikut iniadalah peluang terjadi peristiwa E dengan syarat A [15] :

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)\ P(A)}{P(E)}$$

2.6 Fungsi *Likelihood*

Prinsip *Likelihood* ini sama sekali berbeda dari pendekatan estimasi maksimum *Likelihood* yang hanya satu dari cara untuk mengimplementasi prinsip *Likelihood*. Fungsi *Likelihood* banyak digunakan dalam menentukan estimasi, termasuk pada proses estimasi dengan metode *Bayes*. Informasi yang dibawa oleh pengamatan t tentang θ semuanya terkandung dalam fungsi $l(\theta|t)$ [14]. Fungsi *Likelihood* sebagai berikut [16] :

$$L(\theta_{\mathrm{i}}|t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i)\ , \qquad (2.13)$$

dengan,

θ_i : Parameter distribusi tertentu,

t_i : Waktu antar waktu kerusakan ke i,

$f(t_i)$: Fungsi padat peluang distribusi tertentu pada *t* ke *i*.

2.7 Non Informatif Prior

Distribusi prior non informatif mengandung makna bahwa tidak adanya informasi distribusi peluang yang digunakan sebelumnya [15]. Pendekatan Jeffrey digunakan untuk mendapatkan distribusi prior distribusi non informatif prior [17].

Didefinisikan $\delta = (\theta, \varphi)$ di mana θ dan φ merupakan parameter distribusi tertentu. Distribusi non informatif prior untuk parameter θ dengan data berukuran n berdasarkan pada Informasi Fisher $\left(\mathrm{I}(\theta)\right)$ sebagai berikut [18] :

$$\mathrm{I}(\theta) = -\,nE\left[\frac{\partial^2 \log f(t)}{\partial\theta^2}\right], \tag{2.14}$$

$$f(\theta) = \sqrt{\mathrm{I}(\theta)}\,,$$

dengan,

$E\left[\frac{\partial^2 \log f(T|\theta)}{\partial\theta^2}\right]$: Nilai ekspektasi dari $\frac{\partial^2 \log f(T|\theta)}{\partial\theta^2}$,

$f(t)$: PDF distribusi tertentu

θ : Parameter dari distribusi tertentu.

Jika $g(\varphi)$ merupakan fungsi parameter lokasi yang diasumsikan nilai $g(\varphi)$ mendekati c, sehingga diperoleh distribusi prior $\left(\pi(\theta)\right)$adalah sebagai berikut:

$$\pi(\theta) = f(\theta)g(\varphi),$$

dengan,

$f(\theta)$: Nilai non-informatif prior dari parameter θ,

$g(\varphi)$: Nilai non-informatif prior dari parameter φ.

2.8 Distribusi Posterior

Inferensi yang berdasarkan distribusi θ bersyarat T di mana $\pi(\theta_1, \theta_2|T)$ merupakan simbol dari distribusi posterior dari parameter $\theta_1$dan θ_2 dapat didefinisikan dengan [14]:

$$\pi(\theta_1, \theta_2|T) = \frac{L(\theta_1,\theta_2|\mathrm{T})\,\pi(\theta)}{\int\int L(\theta_1,\theta_2|\mathrm{T})\,\pi(\theta)d\theta_1 d\theta_2}\,, \tag{2.15}$$

2.9 Fungsi Gamma

Fungsi gamma merupakan merupakan fungsi yang banyak dilibatkan dalam distribusi gamma maupun dalam Penghitungan matematis lainnya. Jika T merupakan variabel acak maka fungsi gamma didefinisikan dengan [11]:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \,, \tag{2.16}$$

Fungsi gamma memiliki beberapa lemma yang mana pembuktian lemma – lemma tersebut terlampir pada Lampiran A.

Lemma 2.1.

Jika z merupakan bilangan real $z > 1$ maka nilai fungsi gamma sebagai berikut [11]:

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$$

Lemma 2.2.

Jika z merupakan bilangan bulat lebih besar dari 1 maka nilai dari fungsi gamma adalah sebagai berikut [11] :

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Lemma 2.3.

Jika $z = 1$ maka nilai dari fungsi gamma adalah sebagai berikut [11] :

$$\Gamma(1) = 1$$

Lemma 2.4.

Jika $z = \frac{1}{2}$ maka nilai dari fungsi gamma adalah sebagai berikut [11]:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2.10 *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)*

Sebuah barisan $X_1, X_2, \dots, X_n$ variable acak merupakan *Markov Chain* distribusi kondisional X_{n+1} bergantung banyak pada X_n. Secara umum dapat dikatakan bahwa kejadian saat ini hanya bergantuntung pada satu kejadian sebelumnya. Sedangkan algoritma *Monte Carlo* sendiri merupakan metode *Monte Carlo* numerik yang digunakan untuk menemukan solusi dari permasalahan matematis yang sulit dipecahkan.

Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan metode simulasi untuk membangkitkan peubah – peubah acak menggunakan rantai Markov. Teknik simulasi ini banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan akibat tidak dapat disimulasi secara langsung. Hal tersebut sering terjadi dalam menyelasaikan masalah pada multiparameter maupun multidimensi khususnya pada inferensi *Bayesian*.

Salah satu prinsip penggunaan *Marcov Chain* yaitu dengan *Gibbs Sampler*. Berikut ini merupakan ilustrasi algoritma *Gibbs Sampler* [19]*:*

Misalkan $(x = x_1, x_2, \dots, x_n)$

1. Menentukan nilai awal $x^{(0)}$
2. Untuk $t = 1,2, \dots, T$ ulangi langkah – langkah berikut:
   a. Menentukan $x = \; x^{(t-1)}$
   b. Untuk $t = 1$ perbarui x_j dari $x_j \sim f\left(x_j | x_j\right)$. Proses lengkapnya sebagai berikut:
      Membangkitkan $x_1^{(t)}$dari $f\left(x_1 | x_2^{(t-1)}, x_3^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)}\right)$
      Membangkitkan $x_2^{(t)}$ dari $f\left(x_2 | x_1^{(t)}, x_3^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)}\right)$
      Membagkitkan $x_3^{(t)}$ dari $f\left(x_3 | x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t-1)}\right)$
      . . . .
      . . . .
      Membangkitkan $x_n^{(t)}$ dari $f\left(x_3 | x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n-1}^{()}\right)$
   c. Membentuk $x^{(t)}$ dan menyimpan sebagai himpnan nilai dibangkitkan

2.11 *Regression Probability Plot*

Regression probability plot adalah metode informal dalam memplot distrbusi peluang yang cocok digunakan pada sebuah himpunan data tertentu. Pada penelitian ini digunakan *Least Square Curve* berdasarkan *Linear Regression* pada sumbu Y dengan menggunakan aplikasi *Weibull 6.0* dan mengurutkan nilai r (nilai *Index of Fit*) terbesar sampai terkecil dari keempat distribusi yang diuji. Distribusi peluang yang memiliki nilai *r* tertinggi, sehingga distribusi tersebut merupakan distribusi peluang yang cocok digunakan untuk mengolah suatu data tertentu. Berikut ini merupakan persamaan r dan $F(t_i)$ yang digunakan [8]:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2\right]}} \quad (2.17)$$

$$F(t_i) = \frac{i-0.3}{n+0.4}\ ; 0 < i \leq n$$

Setiap distribusi memiliki definisi x_i dan y_i berbeda., Berikut ini merupakan definisi x_i dan $y_i$sesuai distribusi yang diuji, dimana $0 < i \leq n$ [8] :

a. Distribusi Weibull

   $x_i = \ln t_i$, di mana t_i merupakan waktu antar waktu kerusakan ke i.

   $$y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(t_i)}\right)\right]$$

b. Distribusi Normal

   $x_i = t_i$, di mana t_i merupakan waktu antar waktu kerusakan ke i.

   $$y_i = \phi^{-1}[F(t_i)]$$

c. Distribusi Lognormal

$x_i = \ln t_i$, di mana t_i merupakan waktu antar waktu kerusakan ke i.

$y_i = \phi^{-1}[F(t_i)]$

d. Distribusi Eksponensial

$x_i = t_i$, di mana t_i merupakan waktu antar waktu kerusakan ke i.

$$y_i = \ln\left(\frac{1}{1 - F(t_i)}\right)$$

2.12 ***Goodness of Fit***

Goodness of Fit merupakan langkah akhir dari tes statistik dalam menyeleksi distribusi yang cocok dengan data tertentu. Pada tahap ini dilakukan perbandingan sebuah hipotesis nol (H_0) dengan sebuah hipotesis alternatif (H_1) dengan uraian berikut [8] :

H_0: Data waktu kerusakan kerusakan tepat terdistribusi peluang tertentu

H_1: Data kerusakan tidak tepat terdistribusi peluang tertentu

Apabila nilai statistik lebih kecil dari nilai kritis maka hipotesis nol (H_0) dterima. Besar nilai kritis tergantung pada taraf signifikan dari ukuran sampel atau dari uji yang dilakukan. *Goodness of Fit* dapat dilakukan dengan menguji distribusi secara spesifik dengan menguji *Mann* untuk distribusi Weibull, *Kolmogorov – Smirnov* untuk uji distribusi normal dan distribusi Lognormal, serta uji *Bartett* untuk uji distribusi eksponensial.

2.10.1 Uji *Mann*

Uji ini digunakan untuk mengetahui data kerusakan pada pengamatan sesuai dengan distribusi Weibull. Uji kecocokan distribusi Weibull dikembangkan oleh Mann, Schafer dan Singpurwalla (1974) dengan hipotesis berikut [8]:

H_0 : Data kerusakan terdistribusi Weibull $(T = f(t))$

H_1 : Data kerusakan tidak terdistribusi Weibull $(T \neq f(t))$

Statistik uji pada *Mann* sebagai:

$$M = \frac{k_1 \sum_{i=k_1+1}^{r-1} \left[\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}\right]}{k_2 \sum_{i=1}^{k_1} \left[\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}\right]} \tag{2.18}$$

$$M_i = Z_{i+1} - Z_1$$

$$Z_i = \ln\left[-\ln\left(1 - \frac{i - 0{,}5}{n + 0{,}25}\right)\right]$$

$$k_1 = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \ ; \ k_2 = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$$

$$F_{tabel} = F_{\alpha, 2k_1, 2k_2}$$

dengan,

t_i : Waktu kerusakan ke i,

M : Sebuah taksiran,

n : Banyaknya data,

F_{tabel} : Nilai presentase distribusi F,

α : Batas kesalahan maksimal, dalam penelitian ini peneliti menggunakan $\alpha = 0.05$.

Kriteria uji kecocokan Weibull adalah jika $M < F_{tabel}$ sehingga H_0 diterima, artinya data kerusakan terdistribusi Weibull.

2.10.2 Uji *Kolmogorov - Smirnov*

Sebuah data dikatakan terdistribusi normal jika telah teruji *Kologorov-Smirnov* yang telah dikembangkan oleh H.W Lilliefors (1967) dengan hipotesis berikut [8]:

H_0: Data kerusakan teristribusi normal $(T = f(t))$

H_1: Data kerusakan tidak terdistribusi normal $(T \neq f(t))$

Statistik uji pada uji *Kologorov-Smirnov* sebagai berikut :

$$D_1 = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \phi\left(\frac{t_i - \bar{t}}{s}\right) - \frac{i-1}{n} \right\}$$

$$D_2 = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{i}{n} - \phi\left(\frac{t_i - \bar{t}}{s}\right) \right\}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})}{n-1}}$$

$$D_n = \max\{D_1, D_2\}$$

$$D_{erit} = D_{n,\alpha}$$

di mana,

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n}$$

dengan,

t_i	: Waktu kerusakan ke i,
D_i	: Nilai taksiran,
$\phi\left(\frac{t_i - \bar{\bar{t}}}{n}\right)$	: Nilai di bawah kurva Normal,
n	: Banyaknya data,
α	: Batas kesalahan maksimal, dalam penelitian ini peneliti menggunakan $\alpha = 0.05$.

Kriteria uji kecocokan distribusi normal dan Lognormal adalah jika $D_n < D_{erit}$ sehingga H_0 diterima, artinya data kerusakan terdistribusi Lognormal. Sedangkan untuk menguji apakah sebuah data terdistribusi Lognormal adalah menguji *Kolmogorof – Smirnov* data yang telah di ubah menjadi bentuk $\ln(t_i)$ sehingga diperoleh [8]:

H_0: Data kerusakan teristribusi Lognormal $(T = F(t))$

H_1: Data kerusakan tidak terdistribusi Lognormal $(T \neq F(t))$

di mana, statistik ujinya sebagai berikut

$$D_1 = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\phi\left(\frac{\ln t_i - \bar{t}}{s}\right) - \frac{i-1}{n}\right\} \tag{2.19}$$

$$D_2 = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{i}{n} - \phi\left(\frac{\ln t_i - \bar{t}}{s}\right)\right\} \tag{2.20}$$

$$D_n = \max\{D_1, D_2\}$$

$$D_{erit} = D_{n,\alpha}$$

di mana,

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i - \bar{t})}{n-1}} \tag{2.21}$$

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\ln t_i}{n}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan mengenai metode yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini agar proses pengerjaannya dapat terstruktur dengan baik dan dapat mencapai tujuan yang telah ditetapkan. Proses pengerjaan terdiri dari 7 tahap, yaitu studi pendahuluan, pepersamaanan masalah, pengumpulan data, uji kecocokan data, penentuan distibusi terbaik dengan *Index of Fit* dan *Goodness of Fit,* pengestimasian reliabilitas dengan metode *Bayes* serta analisis hasil dan penarikan kesimpulan. Tahapan tersebut direpresentasikan dalam diagram alur pada Gambar 3.1.

3.1 Studi Pendahuluan

Langkah pertama yang dilakukan dalam melaksanakan penelitian ini adalah melakukan studi pendahuluan. Pada penelitian ini dilaksanakan studi lapangan dan studi literatur. Studi lapangan dilakukan di PDAM Kota Malang untuk mengetahui lebih mendalam mengenai masalah yang sering dialami PDAM di bidang pemeliharaan.

Selain itu, dilakukan pula studi literatur mengenai teori – teori yang relevan dengan reliabilitas dan estimasi *Bayes*. Oleh karena itu, dibutuhkan teori pendukung yang teragkum dalam bab tinjauan pustaka untuk menyelesaikan masalah yang telah ditetapkan pada penelitian Tugas Akhir ini. Tinjauan pustaka ini merupakan referensi untuk membantu menyelesaikan masalah yang diteliti. Teori pendukung yang dibutuhkan dalam penelitian ini yaitu, teori mengenai reliabilitas, estimasi dengan metode *Bayes*, dan uji kecocokan data.

3.2 Perumusan Masalah

Setelah melakukan studi pendahuluan, langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi masalah. Masalah yang diteliti dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana mendapatkan model estimasi reliabilitas menggunakan peluang distribusi Weibull dan distribusi Lognormal dengan metode *Bayes*. Model estimasi reliabilitas tersebut digunakan untuk menganalisis estimasi reliabilitas pompa *submersible* PDAM Kota Malang.

3.3 Pengumpulan Data

Data yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah data pemeliharaan pompa *submersible* berupa waktu antar waktu kerusakan pompa air baku pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang. Data mencakup waktu antar waktu kerusakan pompa dari Januari 2008 hingga Februari 2017.

3.4 Uji Kecocokaa Data

Proses pengolahan data dimulai dengan menguji data yang telah diambil apakah data tersebut merepresentasikan kerusakan pompa *submersible* air baku PDAM Kota Malang yang sesuai dengan distribusi yang diuji dengan menggunakan *Index of Fit* . Proses selanjutnya adalah pengujian *Goodness of Fit* berdasarkan hasil nilai *Index of Fit* tertinggi.

3.5 Mencari Model Estimasian Reliabilitas

Tahap ini merupakan proses untuk mendapatkan model estimasi reliabilitas dengan metode *Bayes* menggunakan distribusi wibull maupun model estimasi reliabilitas dengan distribusi Lognormal. Setelah didapatkan dua model estimasi reliabilitas dengan distribusi berbeda, selanjutnya model tersebut diaplikasikan pada data yang telah diuji pada tahap sebelumnya.

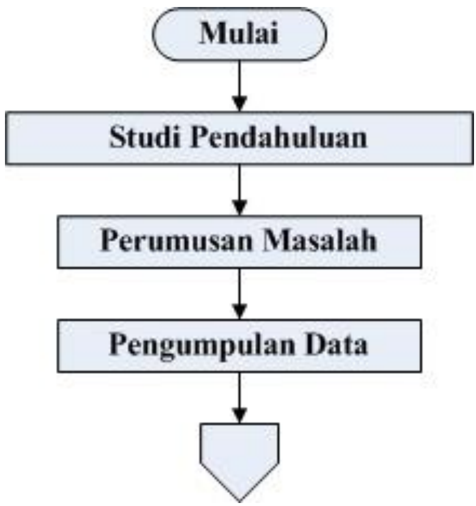
Sehingga output dari tahap ini adalah berupa dua model estimasi relibailitas.

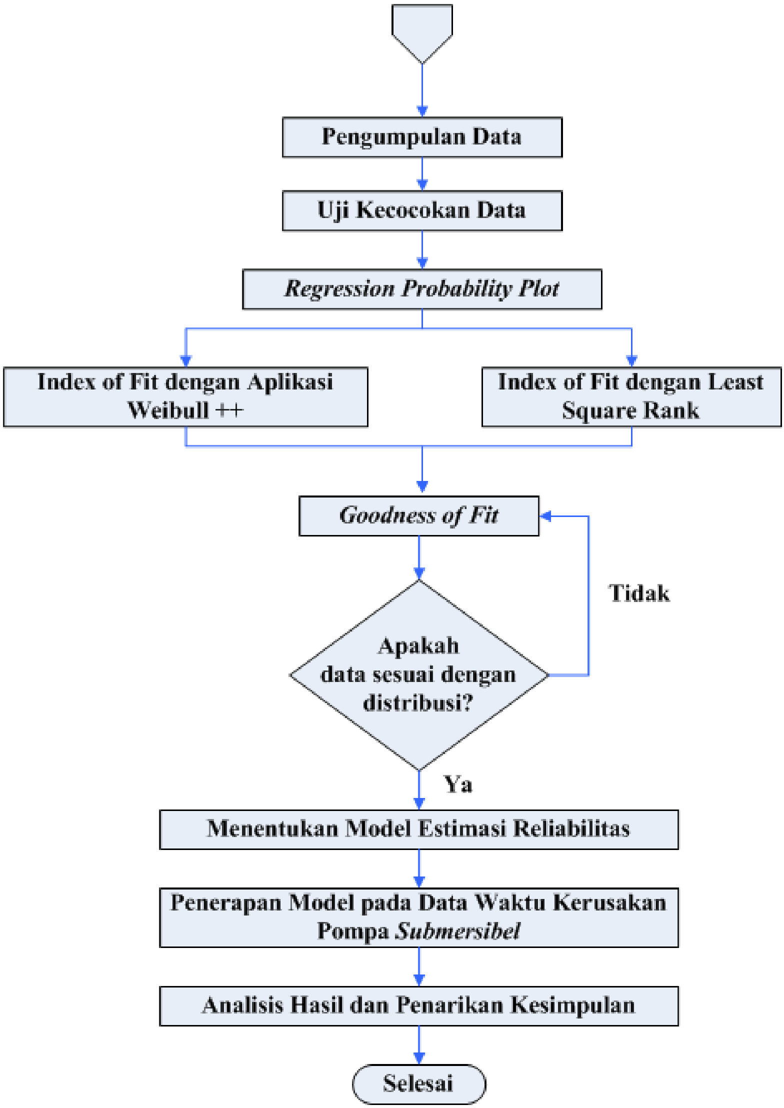
3.6 Penerapan Model Pada Data Kerusakan Pompa *Submersible*

Model estimasi reliabilitas yang telah didapatkan diterapkan pada data yang telah diuji. Hasil yang diperoleh adalah nilai reliabilitas pompa secara independen. Selanjutnya, dari hasil tersebut disubsitusikan dalam persamaan fungsi reliabilitas pada konfigurasi sistem paralel.

3.7 Analisis Hasil dan Penarikan Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penulisan laporan Tugas Akhir dan penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran sebagai masukan untuk penelitian lebih lanjut.





Gambar 3. 1 Diagram Alur Metode Penelitian Tugas Akhir

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai tahapan dalam mendapatkan model estimasi reliabilitas distribusi Weibull dan distribusi Lognormal dengan metode *Bayes* dan analisis hasil estimasi reliabilitas sistem perpompaan *submersible* air baku pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang.

4.1 Pompa *Submersible* Air Bersih PDAM Kota Malang

PDAM Kota Malang sebagai penyedia layanan air bersih untuk masyarakat sekitar memiliki beberapa sumber air untuk memenuhi kebutuhan pelanggan. Salah satu sumber air terbesar PDAM Kota Malang adalah sumber mata air wendit. Air dari sumber wendit ini dipompa melalui rumah – rumah pompa yaitu rumah pompa Wendit I, Wendit II dan Wendit III. Pada penelitian Tugas Akhir ini yang digunakan adalah data waktu antar waktu kerusakan pompa – pompa yang berada pada rumah pompa Wendit I. Air baku yang berasal dari sumber air di daerah Wendit diolah pada bangunan intake yang berfungsi sebagai bangunan yang dilengkapi alat penyaring agar tidak ada kotoran yang mengganggu kinerja pompa. Tahap selanjutnya adalah chlorinasi, yaitu pembubuhan zat disinfektan yang bertujuan untuk membunuh bakteri pada saat melalui pipa distribusi maupun pada saat disimpan di reservoir. Air yang telah melalui tahap chlorinasi disalurkan melalui pipa distribusi menuju zona pelayanan dan sebagian disalurkan melalui pompa transmisi untuk disimpan di reservoir Betek. Alur penyediaan air bersih PDAM Kota Malang tercantum pada Lampiran B.

Gambar 4. 1 Pompa *Submersible*

Jenis pompa yang digunakan PDAM Kota Malang pada rumah pompa Wendit I adalah *submersible*, seperti pada Gambar 4.1. Pompa – pompa tersebut digunakan selama 24 jam setiap harinya. Pemeliharaan pompa yang dilakukan PDAM Kota Malang adalah dengan menjadwalkan pergantian oli mesin setiap bulannya. Selain itu PDAM Kota Malang juga melakukan kontrol pompa dengan mengecek kerja pompa setiap satu jam sekali. Petugas yang bertugas wajib memberikan laporan mengenai kondisi pompa berupa angka flow meter, tekanan, suhu, arus listrik dan tegang listrik pompa, yang selanjutnya diarsipkan pada situs sistem informasi data kinerja pompa PDAM Kota Malang. Kerusakan yang sering terjadi pada pompa *submersible* PDAM Kota Malang yaitu, kerusakan pada flow meter, stand meter, motor pompa dan *grand packing*. Selama bulan Januari 2008 sampai Februari 2017 ketiga pompa *submersible* pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang telah mengalami kerusakan masing – masing sebanyak 83 kerusakan. Data tersebut terlampir pada Lampiran C yang mana t_i didefinisikan sebagai data waktu antar waktu (hari) kerusakan pompa yang digunakan untuk mendapatkan nilai reliabilitas dari pompa – pompa tersebut.

4.2 Uji Kecocokan Data Kerusakan Pompa *Submersible*

Data yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah data waktu antar waktu kerusakan ketiga pompa *submersible* yang disimbolkan dengan t_i di mana $1 < i \leq 82$, artinya jumlah data waktu antar waktu kerusakan ketiga pompa masing - masing sebanyak 82. Uji kecocokan data dilakukan dengan 2 tahap yaitu dengan mempertimbangkan *Index of Fit* yang selanjutnya berdasarkan hasil *index of fit* dilakukan *Goodness of Fit.*

4.2.1 Regression Probability Plot

Regression probability plot yang dilakukan pada penelitian Tugas Akhir ini didasarkan pada penghitungan menggunakan metode *least square* dengan didukung oleh hasil *Rank Regression* pada aplikasi Weibull ++. Hasil penghitungan menggunakan aplikasi Weibull ++ telah terlampir pada Lampiran D. Pada Lampiran D beberapa distribusi telah di urutkan berdasarkan rank, sehingga dapat disimpulkan bahwa distribusi terbaik yang digunakan untuk data t_i pompa II dan III adalah distribusi Weibull dengan 2 parameter, sedangkan untuk data pompa I cocok menggunakan distribusi Weibull 3 parameter. Namun, mengacu pada batasan masalah pada penelitian ini bahwa distribusi yang digunakan adalah distribusi dengan 2 parameter, sehingga dapat disimpulkan hasil dari *Rank Regression* pada aplikasi Weibull ++ untuk data t_i pompa I adalah distribusi Lognormal, karena distribusi Lognormal menduduki urutan ke 2. Tahap selanjutnya adalah menganalisis kecocokan distribusi dengan membandingkan nilai *Index of Fit* (nilai r) distribusi Weibull, distribusi normal, distribusi Lognormal dan distribusi eksponensial pada pompa I, II dan III melalui penghitungan manual menggunakan persamaan (2.17).

i. Distribusi Weibull

Penghitungan untuk mendapatkan nilai *Index of Fit* menggunakan metode *least square* pada distribusi Weibull yaitu, dengan mendefinisikan $x_i = \ln t_i$ dan $y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right)\right]$. Berdasarkan tabel penghitungan pada Lampiran D dapat diperoleh nilai r distribusi Weibull data t_i pada pompa I sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.781 + 2.781 + \cdots + 4.2905 + 4.9416 = 298.0074$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 7.3335 + 7.335 + \cdots + 18.4080 + 24.4198$$

$$= 1093.7505$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -4.7640 - 3.8706 - \cdots + 1.3561 + 1.5620$$

$$= -46.4347$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 22.6957 + 14.9812 + \cdots + 1.8390 + 2.4398$$

$$= 150.5970$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -12.9011 - 10.4816 + \cdots + 5.8182 + 7.7188$$

$$= -134.2052$$

Nilai r pada pompa I untuk distribusi Weibull didapatkan dengan menggunakan persamaan (2.17). Berdasarkan tabel penghitungan pada Lampiran D dapat diperoleh:

$$r = \frac{82(-134.2052) - (298.0074)(-46.4347)}{\sqrt{[82\,(1093.7505) - (298.0074)^2][82(150.5970) - (-46.4347\,)^2]}}$$

$$= \;0.9464$$

Tabel 4.1 Nilai *r* (*Index of Fit*) Distribusi Weibull

Pump	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	r
I	298.01	1093.75	−46.44	150.59	−134.21	0.9464
II	298.14	1097.15	−46.44	150.59	−130.99	0.9355
III	296.72	1089.09	−46.44	150.59	−127.39	0.9297

Langkah – langkah untuk mendapatkan nilai *index of fit* distribusi Weibull dengan dilakukan cara yang sama untuk data t_i pompa II dan Pompa III, yang mana hasil penghitungan dapat dilihat pada Tabel 4.1.

ii. Distribusi Normal

Penghitungan untuk mendapatkan nilai *Index of Fit* menggunakan metode *least square* pada distribusi normal yaitu dengan mendefinisikan $x_i = t_i$ dan $y_i = \phi^{-1}[F(t_i)]$. Berdasarkan tabel pada Lampiran E pada pompa I dapat diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 15 + 15 + \cdots + 73 + 140 = 3315$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 225 + 225 + \cdots + 5329 + 19600 = 155131$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i = -2.3869 - 2.0409 - \cdots + 2.0409 + 2.3869 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = 5.6974 + 4.1652 + \cdots + 4.1652 + 5.6974 = 78.0048$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -35.8038 - 30.6133 + \cdots + 148.9847 + 334.1685$$

$$= 1092.9452$$

Nilai r pada pompa I untuk distribusi normal didapatkan dengan menggunakan persamaan (2.17) sebagai berikut:

$$r = \frac{82(-1092.9452) - (3315)(0)}{\sqrt{[82\ (155131) - (3315)^2][82(78.0048) - (0)^2]}}$$

$$= 0.8516$$

Sedangkan untuk mendapatkan nilai *r* distribusi normal untuk data t_i pompa II dan pompa III diperoleh dengan cara yang sama. Hasil dari perhutangan terdapat pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Nilai *r* (*Index of Fit*) Distribusi Normal

Pump	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	r
I	3315	155131	0	78.0048	1092.9452	0.8516
II	3346	157768	0	78.0048	1078.4421	0.8379
III	3310	154514	0	78.0048	1065.8893	0.8347

iii. Distribusi Lognormal

Penghitungan untuk mendapatkan nilai *Index of Fit* menggunakan metode *least square* pada distribusi Lognormal yaitu dengan mendefinisikan $x_i = \ln t_i$ dan $y_i = \phi^{-1}[F(t_i)]$. Berdasarkan tabel penghitungan data t_i pompa I menggunakan pada Lampiran E dapat diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.781 + 2.781 + \cdots + 4.2905 + 4.9416 = 298.0074$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 7.3335 + 7.335 + \cdots + 18.4080 + 24.4198$$

$$= 1093.7505$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -2.3869 - 2.0409 - \cdots + 2.0409 + 2.3869 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = 5.6974 + 4.1652 + \cdots + 4.1652 + 5.6974 = 78.0048$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -6.4639 - 5.5268 + \cdots + 8.7563 + 11.7953 = 27.2141$$

Nilai r pada pompa I untuk distribusi Lognormal didapatkan dengan menggunakan persamaan (2.17) sebagai yang menghasilkan:

$$r = \frac{82(27.2141) - (298.0074)(0)}{\sqrt{[82\,(1093.7505) - (298.0074)^2][82(78.0048) - (0)^2]}}$$

$$= 0.941$$

Nilai *r* distribusi Lognormal untuk data t_i pompa II dan III diperoleh dengan melakukan hal yang sama seperti langkah pada proses sebelumnya yang menghasilkan nilai *r* sepeti pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai *r* (*Index of Fit)* Distribusi Lognormal

Pump	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	r
I	298.0074	1093.7505	0	78.0048	27.2141	0.941
II	298.1382	1097.1454	0	78.0048	28.7299	0.8965
III	296.7232	1089.0849	0	78.0048	30.2220	0.8728

iv. Distribusi Eksponensial

Penghitungan untuk mendapatkan nilai *Index of Fit* menggunakan metode *least square* pada distribusi eksponensial dengan mendefinisikan $x_i = t_i$ dan $y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right)\right]$. Berdasarkan tabel penghitungan pada Lampiran E data $\boldsymbol{t_i}$ pompa I dapat diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad = 15 + 15 + \cdots + 73 + 140 = 3315$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \quad = 225 + 225 + \cdots + 5329 + 19600 = 155131$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \quad = 0.0085 - 0.0208 - \cdots + 3.8810 + 4.7683 = 80.8599$$

$$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \quad = 0.0001 + 0.0004 + \cdots + 15.0618 + 22.7363$$

$$= 153.2418$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad = 0.1280 + 0.3127 + \cdots + 283.3099 + 667.5565 = 4375.7207$$

Nilai r pada pompa I untuk distribusi eksponensial didapatkan dengan menggunakan persamaan (2.17) diperoleh:

$$r = \frac{82(4375.7207) - (3315)(80.8599\ )}{\sqrt{[82\ (155131) - (3315)^2][82(153.2418) - (80.8599\ )^2]}}$$

$$= \ 0.888$$

Tabel 4.4 Nilai *r* (*Index of Fit*) Distribusi Eksponensial

Pump	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	r
I	3315	155131	80.8599	153.24	4375.72	0.888
II	3346	157768	80.8599	153.24	4362.85	0.8511
III	3310	154514	80.8599	153.24	4294.86	0.8317

Index of Fit distribusi eksponensial untuk data t_i pompa II dan pompa III dapat dicari dengan menggunkan langkah – langkah yang sama, di mana telah didapatkan hasil penghitungannya sepeti pada Tabel 4.4.

Berdasarkan proses penghitungan diperoleh nilai *r (Index of Fit)* yang dapat direpresentasikan pada Tabel 4.5. Nilai r tertinggi pada pompa I, pompa II dan pompa III dimiliki oleh distribusi Weibull. Hal ini berarti data t_i pompa I, pompa II dan pompa III terdistribusi Weibull.

Tabel 4.5 Hasil Penghitungan Nilai $\boldsymbol{r}$ (*Index of Fit*)

	Dist. Weibull	**Dist.i Normal**	**Dist. Lognormal**	**Dist. Eksponensial**	**Nilai *r* Terbesar**
Pompa I	0.9464	0.8516	0.9410	0.888	Distribusi Weibull
Pompa II	0.9355	0.8379	0.8965	0.8511	Distribusi Weibull
Pompa III	0.9297	0.8347	0.8728	0.8317	Distribusi Weibull

4.2.2 Goodness of Fit

Setelah mendapatkan distribusi terbaik berdasarkan *regression probability plot* dan berdasarkan hasil penghitungan menggunakan aplikasi Weibull ++ dapat diketahui bahwa untuk data t_i pompa I memiliki dua asumsi. Berdasarkan nilai r data t_i pompa I terdistribusi Weibull, tetapi berdasarkan hasil aplikasi Weibull ++ terdistribusi Lognormal. Oleh karena itu, data t_i pompa I diuji *Kolmogorov - Smirnov* dan uji *Mann.* Sedangkan, hasil *regression probability plot* berdasarkan nilai *index of fit* menggunakan software Weibull ++ dan nilai *r* untuk data t_i pompa II dan pompa III menujukkan pompa II dan III terdistribusi Weibull, oleh karena itu kedua data tersebut akan diuji *Mann* untuk memastikan tedistribusi Weibull.

i. Uji *Mann* dan *Kolmogorov-Smirnov* Pada Data t_i Pompa I

Uji *Mann* ini dilakukan untuk mengetahui apakah data t_i pompa I terdistribusi Weibull atau tidak dengan hipotesis sebagai berikut, yang mana $\alpha = 0.05$:

H_0 : Data t_i pompa I terdistribusi Weibull ($T = f(t)$)
H_1 : Data t_i pompa I tidak terdistribusi Weibull($T \neq f(t)$),

dengan berdasarkan pada Lampiran F yang menggunakan persamaan (2.18) diperoleh uji statistik :

$$k_1 = \left\lfloor \frac{82}{2} \right\rfloor = 41$$

$$k_2 = \left\lfloor \frac{82-1}{2} \right\rfloor = 40$$

$$M = \frac{41(0 + 0 + \cdots + 0.3360 - 0.4830)}{40(0 + 0.2421 + \cdots + 0 + 0)} = \frac{41(9.1160)}{40(11.9901)}$$

$$= \frac{373.7538}{479.6027}$$

$$= 0.779299$$

$$F_{Tabel} = F_{0.05,82,80}$$

$$F_{0.05,82,80} > F_{0.05,120,100}$$

$$F_{0.05,82,80} > 1.4$$

Berdasarkan tabel statistik F yang terlampir pada Lampiran H diperoleh besar $F_{0.05,120,100}$ adalah 1.40, yang mengakibatkan $M < 1.4 < F_{0.05,82,80}$, sehingga dapat disimpulkan H_0 diterima. Hal ini berarti data t_i pompa I terdistribusi Weibull.

Selanjutnya, data t_i pompa I juga diuji *Kolmogorov Smirnov* untuk memastikan data tersebut terdistribusi Lognormal atau tidak, dengan hipotesis sebagai berikut, di mana $\alpha = 0.05$:

H_0 : Data t_i pompa I terdistribusi Lognormal $(T = f(t))$

H_1 : Data t_i pompa I tidak terdistribusi Lognormal $(T \neq f(t))$,

berdasarkan tabel penghitungan pada Lampiran G pada data t_i pompa I, diperoleh nilai rata – rata t_i $(\bar{t})$ dan nilai standart deviasi (s) dengan menggunakan persamaan (2.21) sebagai berikut:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln t_i}{n}$$

$$= \frac{(2.8080 + 2.7080 + \cdots + 4.2905 + 4.9416)}{82}$$

$$= \frac{(2.8080 + 2.7080 + \cdots + 4.2905 + 4.9416)}{82}$$

$$= 3.6342$$

$$s = \sqrt{\frac{(0.8579 + 0.8579 + \cdots + 0.406 + 1.7093)}{(82 - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{10.7211}{81}}$$

$$= 0.4415$$

Niai $\bar{t}$ dan s yang telah diperoleh, digunakan untuk mendapatkan D_1 dan D_2 dengan menggunakan persamaan (2.19) dan (2.20) yang hasilnya terlampir pada Lampiran G, sehingga diperoleh:

$D_1 = 0.2216$

$D_2 = 0.1905$

Sehingga,

$$D_n = \max\{0.2216\,, 0.1905\}$$

$D_n = 0.2216$

$D_{erit} = D_{n,\alpha} = D_{81,0.5}$

Berdasarkan tabel nilai kritis uji Kolmogrov – Smirnov pada Lampiran I diketahui dengan pendekatan nilai kritis sehingga digunakan persamaan $D_{n,\alpha} = \frac{1.36}{\sqrt{n}}$, sehingga untuk data t_i pompa I yang memiliki data kerusakan sebanyak 82 data diperoleh :

$$D_{81,0.05} = \frac{1.36}{\sqrt{82}} = 0.1502$$

Hasil d iatas menunjukkan bahwa $D_n > D_{erit}$ sehingga mengakibatkan H_0 ditolak, artinya data t_i pompa I tidak terdistribusi Lognormal. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk mencari estimasi reliabilitas pompa I digunakan model estimasi reliabilitas dengan distribusi Weibull 2 parameter menggunakan metode *Bayes*.

ii. Uji *Mann* Pada Data t_i Pompa II

Data t_i pompa II ini diuji apakah terdistribusi Weibull atau tidak dengan $\alpha = 0.05$ dan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data t_i pompa II terdistribusi Weibull ($T = f(t)$)

H_1 : Data t_i pompa II tidak terdistribusi Weibull ($T \neq f(t)$),

dengan berdasarkan pada Lampiran F yang menggunakan persamaan (2.18) diperoleh uji statistik :

$$k_1 = \left\lfloor \frac{82}{2} \right\rfloor = 41$$

$$k_2 = \left\lfloor \frac{82-1}{2} \right\rfloor = 40$$

$$M = \frac{41(0 + 0 + \cdots + 0.2194 - 0.4782)}{40(0.3328 + 0.1433 + \cdots + 0 + 0)} = \frac{41(7.1601)}{40(12.2135)}$$

$$= \frac{293.5639}{488.5395}$$

$$= 0.6009$$

$$F_{Tabel} = F_{0.05,82,80}$$

$$F_{0.05,82,80} > F_{0.05,120,100}$$

$$F_{0.05,82,80} > 1.4$$

F_{tabel}yang diperoleh dari tabel statistik F yang terlampir pada Lampiran H menunjukkan bahwa $M < 1.4 < F_{0.05,82,80}$ sehingga dapat disimpulkan H_0 diterima, yang artinya data t_i pompa II terdistribusi Weibull. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk mencari estimasi reliabilitas pompa II digunakan model estimasi reliabilitas dengan distribusi Weibull 2 parameter menggunakan metode *Bayes.*

iii. Uji *Mann* Pada Data t_i Pompa III

Data t_i pompa III ini diuji menggunakan *Mann* untuk mengetahui apakah data tersebut terdistribusi Weibull atau tidak dengan $\alpha = 0.05$ dan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data t_i pompa III terdistribusi Weibull $(T = f(t))$

H_1 : Data t_i pompa III tidak terdistribusi Weibull $(T \neq f(t))$,

serta dengan berdasarkan pada penghitungan yang terlampir pada Lampiran F yang menggunakan persamaan (2.18) diperoleh uji statistik :

$$k_1 = \left\lfloor \frac{82}{2} \right\rfloor = 41$$

$$k_2 = \left\lfloor \frac{82-1}{2} \right\rfloor = 40$$

$$M=\frac{41(0+0+\cdots+0.7513-0.5519)}{40(0.2604+0.9390+\cdots+0+0)}=\frac{41(7.7779)}{40(13.2206)}$$
$$=\frac{318.8937}{528.8257}$$
$$=0.6030$$

$F_{Tabel}=F_{0.05,82,80}$

$F_{0.05,82,80}>F_{0.05,120,100}$

$F_{0.05,82,80}>1.4$

Penghitungan diatas menujukkan bahwa $M<1.4<F_{0.05,82,80}$ Hal ini mengakibatkan H_0 diterima, artinya data t_i pompa III terdistribusi Weibull. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk mencari estimasi reliabilitas pompa III digunakan model estimasi reliabilitas dengan distribusi Weibull 2 parameter menggunakan metode *Bayes.*

4.3 Menentukan Model Estimasi Reliabilitas

Pada penelitian ini, metode *Bayes* digunakan untuk menentukan model estimasi reliabilitas dengan distribusi Weibull dan model estimasi reliabilitas dengan distribusi Lognormal. Berdasarkan uji *Goodness of Fit* yang telah di lakukan sebelumnya, data t_i pompa I, pompa II dan pompa III berdistribusi Weibull sehingga model reliabilitas distribusi Weibull yang didapatkan, digunakan untuk memperoleh nilai reliabilitas sistem perpompaan pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang. Sedangkan model estimasi relibilitas distribusi Lognormal sebagai salah satu output dari penelitian ini, diharapkan menjadi acuan untuk dapat dikembangkan pada penelitian selanjutnya.

4.3.1 Model Estimasi Reliabilitas Pada Distribusi Weibull

Terdapat beberapa proses dalam menentukan estimasi reliabilitas dengan metode *Bayes*, yaitu menentukan distribusi prior dan fungsi *Likelihood* yang mana keduanya digunakan untuk mendapatkan distribusi posterior. Distribusi posterior yang diperoleh digunakan untuk mengestimasi parameter dari distribusi Weibull serta digunakan dalam menentukan estimasi reliabilitas.

i. Fungsi *Likelihood* Distribusi Weibull

Fungsi *Likelihood* didapatkan dengan mensubsitusikan fungsi padat peluang distribusi Weibull (2.7) ke dalam fungsi *Likelihood* (2.13).

$$L(\theta,\beta|\mathrm{t}) = \prod_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)$$

$$= \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n}(t_i)^{\beta-1}\; e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i{}^{\beta}}{\theta}}, 0 < i \leq n \qquad (4.1)$$

ii. Dristibusi Prior Non Informatif Distribusi Weibull

Distribusi prior diperoleh dengan mendapatkan nilai logaritma dari fungsi padat peluang distribusi Weibull terlebih dahulu, yaitu:

$$\log f(\mathrm{t}) = \log\left[\frac{\beta}{\theta} t^{\beta-1} e^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}}\right]$$

$$= -\log\theta + \log\beta + \beta\log t - \log t - \frac{t^{\beta}}{\theta}\log e$$

Dengan menggunakan logaritma yang telah diketahui dapat diperoleh turunan pertama dan kedua dari logaritma fungsi padat peluang distribusi Weibull sebagai berikut:

$$\frac{\partial \log f(\mathrm{t})}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}[-\log\theta + \log\beta + \beta\,\log t]$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{t^{\beta}}{\theta}\log e+\log t\right]$$

$$=-\frac{1}{\theta}+\frac{t^{\beta}}{\theta^{2}}$$

$$\frac{\partial^{2}\ln f(\mathrm{t})}{\partial{\theta_{2}}^{2}}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{\theta}+\frac{t^{\beta}}{\theta^{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\theta^{2}}-\frac{2t^{\beta}}{\theta^{3}},$$

Sehingga nilai Informasi Fisher dapat diketahui dengan persamaan (2.14) diperoleh haasil sebagai berikut:

$$\mathrm{I}(\theta)=-n\,E\left[\frac{1}{\theta^{2}}-\frac{2t^{\beta}}{\theta^{3}}\right]$$

$$=-2n\left(\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\theta^{2}}\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}e^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}}\;\;dt_{i}\right)+$$

$$4n\left(\int_{0}^{\infty}\left(\frac{t^{\beta}}{\theta^{3}}\right)\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}e^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}}\;\;dt_{i}\right)$$

$$=-2n\left(\frac{1}{\theta^{2}}\right)+4n\left(\frac{1}{\theta^{2}}\right)$$

$$=\frac{2n}{\theta^{2}}$$

$$f(\theta)=\sqrt{\mathrm{I}(\theta)}=\sqrt{\frac{2n}{\theta^{2}}}=\frac{1}{\theta}\sqrt{2n}$$

Pada penelitian ini digunakan prior satu dimensi, oleh karena itu untuk parameter β diasumsikan $g(\beta)\propto c$ diperoleh distribusi prior:

$$\pi(\theta)=f(\theta)g(\,\beta)$$

$$=\frac{1}{\theta}\sqrt{2n}\times c\propto\frac{1}{\theta}\sqrt{2n}\qquad(4.2)$$

iii. Distribusi Posterior Menggunakan Distribusi Weibull

Proses selanjutnya adalah mendapatkan distribusi posterior dengan mensubsitusikan fungsi *Likelihood* (4.1) dan distribusi prior (4.2) ke dalam (2.15) yang mengasilkan:

$$\pi(\theta,\beta|T) = \frac{\sqrt{2n}\left(\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n (t_i)^{\beta-1}\ e^{-\sum_{i=1}^n \frac{t_i{}^\beta}{\theta}}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{2n}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \left(\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n (t_i)^{\beta-1}\ e^{-\sum_{i=1}^n \frac{t_i{}^\beta}{\theta}}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right) d\beta\right] d\theta}$$

Misalkan:

$\prod_{i=1}^n t_i = \rho$ dan $\sum_{i=1}^n t_i{}^\beta = \omega$

diperoleh :

$$\pi(\theta,\beta|T) = \frac{\left(\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\right)}{\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\, d\theta\right] d\beta}$$

$$\pi(\theta,\beta|T) = K^{-1}\left(\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\right)$$

di mana,

$$K = \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\, d\theta\right] d\beta$$

$$K = \int_0^\infty \beta^n\rho^{\beta-1}\left[2\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+1}}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\, d\theta\right] d\beta$$

$$K = 2\int_0^\infty \beta^n\rho^{\beta-1}\frac{1}{\omega^n}\ \Gamma(n)\,d\beta$$

$$K = 2\,\Gamma(n)\int_0^\infty \beta^n\rho^{\beta-1}\frac{1}{\omega^n}\,d\beta$$

Karena $\omega = \sum_{i=1}^n t_i{}^\beta$ diperoleh:

$$K = 2\Gamma(n)\int_0^\infty \beta^n\rho^{\beta-1}\left(\sum_{i=1}^n t_i{}^\beta\right)^n d\beta$$

$$\pi(\theta,\beta|T) = \frac{\left(\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)\int_0^\infty \beta^n\rho^{\beta-1}\left(\sum_{i=1}^n t_i{}^\beta\right)^n d\beta} \tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) yang diperoleh menunjukkan persamaan yang tidak mudah untuk diselesaikan secara langsung dan bersifat *infisible.* Oleh karena itu untuk mendapatkan model reliabilitasnya, fungsi padat peluang distribusi Weibull ditransformasikan ke dalam bentuk eksponensial dengan metode transformasi univariat.

iv. Fungsi Relibilitas Distribusi Weibull

Model estimasi reliabilitas distribusi Weibull didapatkan dengan melakukan transformasi dengan metode transformasi univariate dengan persamaan sebagai berikut:

$$f(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right|$$

Jika pada fungsi padat peluang distribusi Weibull (2.7) dimisalkan $y = \ t^{\beta}$ dan $\frac{1}{\theta} = \varphi$ sehingga diperoleh :

$$g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\beta}}$$

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = \beta\varphi y^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} e^{-\varphi y}$$

$$f(y) = (\varphi e^{-\varphi y}) = \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}y}\right) \tag{4.3}$$

Setelah didapatkan hasil transformasi yaitu persamaan (4.3), terlihat bahwa persamaan tersebut berbentuk fungsi padat peluang distribusi eksponensial. Proses selanjutnya adalah mendapatkan fungsi *Likelihood* $(L(\theta|y_i))$ dari fungsi padat peluang eksponensial (2.5) di mana $0 < i \leq n$ sebagai berikut:

$$L(\theta|y_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}y_i}\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i} \tag{4.4}$$

Distribusi prior dari distribusi eksponensial berdasarkan Lampiran K diperoleh Informasi Fisher sebagai berikut :

$$\mathrm{I}(\theta) = \frac{2n}{\theta^2}$$

sehingga distribusi prior dengan metode Jeffrey diperoleh :

$$\pi(\theta) = \sqrt{\mathrm{I}(\theta)}$$

$$= \sqrt{\frac{2n}{\theta^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2n}}{\theta}$$

Tahap selanjutnya adalah menentukan distribusi posterior dengan mensubsitusikan fungsi *Likelihood* yang telah diperoleh (4.4) dan distribusi prior (4.5) ke dalam persamaan distribusi posetior (2.13) sebagai berikut.

$$\pi(\theta|T) = \frac{\sqrt{2n}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right) d\theta}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^n \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)}$$

Model estimasi reliabilitas dengan metode *Bayes* didefinisikan sebagai ekspektasi dari fungsi reliabilitas distribusi tertentu, dalam hal ini distribusi eksonensial yang digunakan. Artinya, dengan mensubsitusikan distribusi posterior yang diperoleh dan fungsi reliabilitas distribusi eksponensial (2.6) terhadap persamaan model estimasi reliabilitas (2.9) diperoleh :

$$R(t)^* = E(R(t)|T)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y}{\theta}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^n \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)} d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)+y\right)^n}$$

Karena $y = t_i{}^{\beta}$ diperoleh Model estimasi Reliabilitasnya sebgai berikut:

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^n}$$

Berdasarkan model estimasi reliabilitas yang telah diperoleh, model tersebut masih mengandung parameter β yang belum diketahui estimasi nilainya. Karena distribusi posterior yang telah dilakukan *infisible* sehingga estimasi parameter β ditentukan dengan metode MCMC menggunakan *software OpenBugs*.

Hal pertama yang dilakukan dalam mengestimasi nilai parameter β menggunakan *OpenBugs* adalah dengan membentuk algoritma, di mana diasumsikan distribusi prior dari $\theta \sim Expenensial$ (0.01) dan $\beta \sim Gamma$ (0.1,0.001) dengan menginput data t_i pompa I, pompa II dan pompa III. Nilai distribusi posterior dibangkitkan dengan metode MCMC menggunakan *coding source* yang terlampir pada Lampiran M. Setelah algoritma dijalankan diperoleh hasil secara statistik seperti pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Hasil Uji Statistik Parameter $\boldsymbol{\beta}$ Menggunakan *OpenBugs*

Pompa	Mean	Standar Deviasi	5% dari SD	MC Error
I	2.325	0.1687	0.0084	0.0022
II	2.349	0.1699	0.0085	0.0020
III	2.321	0.1697	0.0084	0.0023

Mean disini merupakan rata-rata dari nilai bangkitan distribusi posterior. Berdasarkan definisinya, estimasi parameter dengan metode *Bayes* merupakan nilai ekspektasi dari posterior, artinya nilai parameter mendekati nilai rata - rata distribusi posteriornya [20]. Langkah selanjutnya adalah memastikan apakah nilai bangkitan posterior yang telah didapatkan bersifat konvergen. Ioannis Ntzaufras (2008) dalam bukunya menyatakan salah satu cara untuk memastikan apakah data bangkitan konvergen atau tidak dapat diuji dengan melihat nilai kesalahan *Markov Chain* (MC). Jika nilainya rendah dibandingkan dengan ringkasan posteriornya (terutama standar kesalahan), sehingga kerapatan posterior diperkirakan akurat. Ntzaufras memisalkan data akurat jika 0.1% dari nilai standar deviasi lebih besar dari MC error yang diperoleh. [19]. Karena dalam penelitian ini digunakan taraf signifikan 0.05 sehingga untuk memastikan nilai bangkitan distribusi posterior yang diperoleh konvergen yaitu dengan membandingkan apakah 0.05 dari standar deviasi distribusi posterior lebih besar atau tidak. Berdasarkan Tabel 4.6 dapat diketahui bahwa nilai 0.05 dari standar deviasi distribusi posterior lebih besar dibanding MC Error, jadi dapat disimpulkan data bangkitan tersebut konvergen.

Selain itu kekonvergenan sebuah data dapat diuji dengan mengamati *trace plot* yang terdapat pada Lampiran M. Berdasrkan ketiga *trace plot* tersebut dapat disimpulkan bahwa data tersebut konvergen karena tidak ada trend atau kecenderungan dalam trace plot. Oleh karena itu, berdasarkan Tabel 4.6 dapat diketahui bahwa parameter β untuk pompa I adalah 2.325, untuk pompa II adalah 2.349 dan untuk pompa III adalah 2.321. Sehingga model reliabilitas masing – masing pompa sebagai berikut :

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^n} \tag{4.5}$$

di mana , $\beta = 2.325$ untuk pompa I

$\beta = 2.349$ untuk pompa II

$\beta = 2.321$ untuk pompa III

4.3.2 Model Estimasi Reliabilitas Pada Distribusi Lognormal

Selain distribusi Weibull, distribusi Lognormal banyak digunakan dalam menentukan nilai reliabilitas. Oleh karena itu, walaupun data t_i pompa I, pompa II dan pompa III tidak terdistribusi Lognormal, penelitian ini membahas bagaimana mendapatkan model reliabilitas menggunakan distribusi Lognormal dengan metode *Bayes*. Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Evi (2016), diperoleh estimasi parameter μ (2.1) dan distribusi posterior marginal σ^2 (2.2) yang digunakan untuk memperoleh model estimasi reliabilitas dari distribusi Weibull. Sebelumnya diperoleh estimasi parameter σ^2 dengan mensubsitusikan (2.2) pada $E(\sigma^2|t_i)$ berikut :

$$\sigma^2 *= E(\sigma^2|t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \, \pi(\sigma^2|t_i) \, d\sigma^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \, \frac{e^{-\frac{\beta}{2\sigma^2}}}{2\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) (\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \, d\sigma^2$$

$$= \frac{2}{2\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2\sigma^2}}}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \, d\sigma^2$$

$$= \frac{\beta}{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}{n^2-3n} \qquad (4.6)$$

Selanjutnya, model estimasi reliabilitas didapatkan dengan mensubsitusikan estimasi parameter (2.1) dan (4.6) pada persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$R(t) = \phi\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln t_i}{n} - \ln(t)}{\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}{n^2-3n}}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{(n-3)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln t_i - \mathrm{n}\ln(t)\right)}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}\right)$$

4.4 Hasil Penerapan Model Pada Data Kerusakan Pompa *Submersible*

Langkah selanjutnya adalah menganalisis reliabilitas pompa pada tanggal 15 Maret 2017 untuk pompa I, pompa II dan Pompa III pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang dengan model estimasi reliabilitas yang telah diperoleh (4.5).

Berikut ini merupakan nilai estimasi reliabilitas pompa I yang memiliki total data t_i sebanyak 82 :

$$t = 15\, Maret\ 2017 - 31\, Januari\ 2017 = 43$$

di mana ,

$\beta = 2.321$ untuk pompa I

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i^{(2.345)}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i^{(2.321)}\right) + t^{(2.321)}\right)^{82}}$$

$$= \frac{\left(28^{(2.321)} + 28^{(2.321)} + \cdots + 42^{(2.321)} + 140^{(2.321)}\right)^{82}}{\left(\left(28^{(2.321)} + 28^{(2.321)} + \cdots + 42^{(2.321)} + 140^{(2.321)}\right) + 43^{(2.321)}\right)^{82}}$$

$$= \left(\frac{5550006.8713}{5550006.8713 + 6184.1538}\right)^{82}$$

$$= 0.4030$$

Berikut ini merupakan nilai estimasi reliabilitas pompa II yang memiliki total data t_i sebanyak 82 :

$t = 15\ Maret\ 2017 - 14\ Februari\ 2017 = 29$

di mana , $\beta = 2.345$ untuk pompa II

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i^{(2.345)}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i^{(2.345)}\right) + t^{(2.345)}\right)^{82}}$$

$$= \frac{\left(22^{(2.345)} + 18^{(2.345)} + \cdots + 42^{(2.345)} + 141^{(2.345)}\right)^{82}}{(22^{(2.345)} + 18^{(2.345)} + \cdots + 42^{(2.345)} + 141^{(2.345)} + 43^{(2.345)})^{82}}$$

$$= \left(\frac{613178.5}{613178.5 + 2723.785}\right)^{82}$$

$$= 0.6952$$

Berikut ini merupakan nilai estimasi reliabilitas pompa III yang memiliki total data t_i sebanyak 82 :

$t = 15\ Maret\ 2017 - 18\ Februari\ 2017 = 25$

di mana , $\beta = 2.32$ untuk pompa III

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i^{(2.345)}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i^{(2.345)}\right) + t^{(2.345)}\right)^{82}}$$

$$= \frac{\left(19^{(2.32)} + 13^{(2.32)} + \cdots + 31^{(2.32)} + 141^{(2.32)}\right)^{82}}{(19^{(2.32)} + 13^{(2.32)} + \cdots + 31^{(2.32)} + 141^{(2.32)} + 27^{(2.32)})^{82}}$$

$$= \left(\frac{551014.2}{551014.2 + 1756.381}\right)^{82}$$

$$= 0.7703$$

Selanjutnya, adalah menentukan reliabilitas dari sistem perpompaan rumah pompa Wendit I dengan menggunakan persamaan(2.10) berikut :

$$R_s(t) = 1 - \left[\left(1 - R_1(t)\right)\left(1 - R_2(t)\right)\left(1 - R_3(t)\right)\right]$$

$$= 1 - [(1 - 0.4030)(1 - 0.6952)(1 - 0.7703)]$$

$$= 1 - [(0.5965)(0.3047)(0.2296)]$$

$$= 1 - 0.0419$$

$$= 0.9583$$

Sehingga dapat diketahui bahwa nilai reliabilitas sistem perpompaan rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah 0.9583.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari hasil analisis data pada Tugas Akhir ini dan saran yang bisa digunakan untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, kesimpulan yang diperoleh dalam penelitian Tugas Akhir ini yaitu :

1. Model estimasi reliablitas distribusi Weibull dengan metode *Bayes* secara umum adalah

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^n},$$

   yang mana nilai estimasi parameter β tergantung pada kasus yang akan ditangani. Sedangkan, model estimasi reliabilitas untuk distribusi Lognormal dengan metode *Bayes* secara umum adalah

$$R(t)^* = \phi\left(\frac{(n-3)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \mathrm{n}\ln(t)\right)}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}\right)$$

2. Model estimasi reliabilitas untuk mendapatkan nilai reliabilitas ketiga pompa *submersible* pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{\beta}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^{82}}$$

di mana , $\beta = 2.325$ untuk pompa I

$\beta = 2.349$ untuk pompa II

$\beta = 2.321$ untuk pompa III

Hasil perhutngan yang diperoleh berupa nilai relibilitas pompa pada tanggal 15 Maret 2017 untuk pompa I adalah 0.4030, nilai reliabilitas pompa II adalah 0.6952 dan nilai relibilitas pompa III adalah 0.7703. Sedangkan nilai relibilitas sistem perpompaan pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah 0.9583. Karena nilai reliabilitas sistem perpompaan mendekati 1 sehingga dapat dikatakan sistemperpompaan rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang sangat baik.

5.2 Saran

Nilai reliabilitas pompa dan model reliabilitas yang menjadi keluaran dari penelitian Tugas Akhir ini dapat menjadi alternative bagi PDAM Kota Malang untuk menentukan waktu pemeliharaan pompa. Namun, akan lebih baik jika PDAM Kota Malang memiliki standar nilai reliabilias yang akan menjadi acuan dalam menentukan waktu pemeliharaan pompa. Pada penelitian selanjutnya diharapakan dapat mendapatkan model estimasi reliabilitas terhadap distribusi peluang lain dengan menggunkan metode *Bayes.* Selain itu, juga dapat dilakukan penerapan model estimasi reliabilitas distribusi Lognormal yang telah diperoleh terhadap sebuah studi kasus tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Mobley, R K; Hinggins, L R dan Wikoff D J. (2008). *Maintanance Engineering Handbook*. New York: McGraw-Hill.

[2] Sheut C. dan Krajewski. (1993). *A Decision Model For Corrective Maintenance Management*. Kansas State university, Departement of Management, Collage of Bussines Adminisration, Manhattan, KS 66506, USA.

[3] Blonch, H.P. (1990). *Improving Machinery Reliability 3rd ed*". Gulf Publishing Co., Houston.

[4] Agustina D. V. (2007). Analisa Kinerja Sistem Distribusi Air Bersih Pdam Kecamatan Banyumanik di Perumnas Banyumanik". Program Magister Teknik Sipil Universitas Diponegoro, Semarang.

[5] Bintariadi, Bibin. (2010). Pelayanan PDAM Kota Malang Kembali Normal. Malang: Tempo Interaktif. (10 Maret 2017).

[6] Adel, D. M. (2016). Estimasi dan reliabilitas pada distribusi Weibull dengan metode *Bayes*. Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Mahaputra Muhammad Yamin, Solok.

[7] Diana, E. N. dan Soehardjoepri. (2016). Pendekatan Metode *Bayes* untuk Kajian Estimasi Parameter Distribusi Log-Normal untuk Non-Informatif Prior. Jurusan Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Surabaya.

[8] Ebeling, C. E. (1996). *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering***.** The McGraw-Hill Companies. Singapore.

[9] Perusahaan Daerah Air Minum Kota Malang. 2017. Statistik.http://www.pdamkotamalang.com/user/proses_menu/110. Diakses 3 April 2017.

[10] Rausand, M dan Hoyland, A. (2004). *System Reliability Theory* .Edisi ke 2. USA: John Wiley and Son.

[11] Sahoo,P. (2008). *Probability and Mathematical Statistics*.Department of Mathematics University of Louisville, KY 40292 USA.

[12] Schwarz, G. E. (1978). *Estimating the dimension of a model***.** Annals of Statistics 6**.**

[13] Modarres, M. , Kaminskiy, M. dan Krivtsov, V. (1999). *Reliability Engineering and Risk Analysis: A Practical Guide*.Marcell Dekker Inc. New York.

[14] Sinha, S.K dan Kale, B.K. (1980). *Life Testing and Reliability Estimation.* Wile Eastern limited, NewDelhi.

[15] Robert, C. P. (1994). *The Bayes Choice.* Springer-Verlag New York Inc. New York.

[16] Walpole, R.E dan Myer, R. H. (1995). Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan.Edisi ke-4. ITB, Bandung.

[17] Bernardo, J. M. dan M. A. Juarez. (2003). *Intrinsic Estimation, Bayes Statistics 7*. Oxford : University Press.

[18] Hogg, r.v DAN Craig, A.T.(2005). *Introduction of Mathematical Statistics*. Edisi ke-6. New Jersey : Pearson Prentice Hall.

[19] Ntzoufras, Ioannis. (2009). *Bayesian Modeling Using WinBugs*. Canada : John Wiley dan Sons,Inc.

[20] Puza, Borek. (2015). *Bayesian Method for Statistical Analysis*. Australian National University. Australia: ANU eView.

LAMPIRAN A

Pembuktian Lemma Fungsi Gamma dan Beta

Lemma 2.1.

Jika z merupakan bilangan real $z > 1$ maka nilai fungsi gamma sebagai berikut :

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$$

Bukti:

Misalkan:

$$u = x^{z-1} \Leftrightarrow du = (z-1)\, x^{z-2}\ dx$$

$$dv = e^{-x}\, dx \Leftrightarrow v = -e^{-x}$$

Dengan menggunakan fungsi gamma (2.16) diperoleh ntegral parsial untuk $\Gamma(n)$ dinyatakan dengan

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\Gamma(z) = \lim_{p\to\infty}\left(x^{z-1}(-e^{-x}) - \int_0^p (-e^{-x})(z-1)\, x^{z-2}\, dx \right)$$

$$\Gamma(z) = \lim_{p\to\infty}\left(\left(-x^{z-1}e^{-x}\big|_{n=0}^{p}\right) + (z-1)\int_0^p\ x^{z-2}e^{-x}\, dx \right)$$

$$\Gamma(z) = 0 + (z-1)\Gamma(z-1)$$

Jadi terbukti bahwa berlaku $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$, untuk setiap $z > 1$.

Lemma 2.2.

Jika z merupakan bilangan bulat lebih besar dari 1 maka nilai dari fungsi gamma adalah sebagai berikut :

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Bukti:

Berdasarkan **Lemma 2.1** dan fungsi gamma (2.16) dapat diketahui bahwa jika $z = 1$ maka diperoleh nilai $\Gamma(1)$ sebagai berikut:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(1) = \lim_{u \to \infty} \int_0^u e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(1) = \lim_{u \to \infty} [-e^{-x}]_0^u$$

$$\Gamma(1) = \lim_{u \to \infty} (-e^{-x} + e^0)$$

$$\Gamma(1) = \left(-\frac{1}{e^\infty} + e^0\right)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

Jika diketahui bahwa $\Gamma(1) = 1$ maka subtitusi nilai $n = 1,2,3$ ... pada persamaan $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ diperoleh

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1.1 = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3 + 1) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(z) = (z - 1)!$$

Lemma 2.3.

Jika $z = 1$ maka nilai dari fungsi gamma adalah sebagai berikut :

$$\Gamma(1) = 1$$

Bukti:

Dengan menggunakan fungsi gamma (2.16) diperoleh:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty (t)^{1-1}\, e^{-t}\, dt$$

$$= [-e^{-t}]_0^{\infty}$$
$$= [-e^{-t}]_0^{\infty}$$

Lemma 2.4.

Jika $z = \frac{1}{2}$ maka nilai dari fungsi gamma adalah sebagai berikut :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Misalkan:

$$x = y^2 \Leftrightarrow dx = 2\text{y dy}$$

Batas atas dan batas bawahnya tetap

$$x = 0 \Rightarrow \text{y} = 0$$
$$x = \infty \Rightarrow \text{y} = \infty$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{2(n-1)} e^{-y^2} 2y\, dy$$

atau

$$\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy$$

Persamaan berikut disusun dengan memasukkan nilai $n = \frac{1}{2}$ pada bentuk lain dari fungsi Gamma untuk membuktikan bahwa nilai dari $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} y^0 e^{-y^2}\, dy$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(y^2+z^2)}\, dydz$$

Variabel y dan z pada persamaan diatas diubah kedalam bentuk koordinat polar sebagai berikut:

$$y = r\ \cos\theta \text{ dan } z = r\sin\theta$$

Dengan $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ dan $\theta = arctg\ \frac{y}{z}$

Transformasi Jacobian dari koordinat (y,z) menjadi koordinat polar (r, θ) dinyatakan dengan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\mathrm{r}\sin\theta \\ \sin\theta & \mathrm{r}\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$J = r(cos^2\theta + sin^2\theta)$$

$$J = r$$

Batas:

$$y = 0 \Rightarrow \mathrm{r} = 0$$

$$y = \infty \Rightarrow \mathrm{r} = \infty$$

$$z = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$z = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Elemen luas $dydz = r\,dr\,d\theta$, sehingga persamaan yang diperoleh:

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}\ dydz$$

menjadi,

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2}\ r\,dr\,d\theta$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \left(2\int_0^{\pi/2} d\theta\right).\left(2\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 2\left[\theta\Big|_0^{\pi/2}\right].2\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi.\ 2\left(\lim_{u\to\infty}\int_0^{u} e^{-r^2}\ r\, dr\right)$$

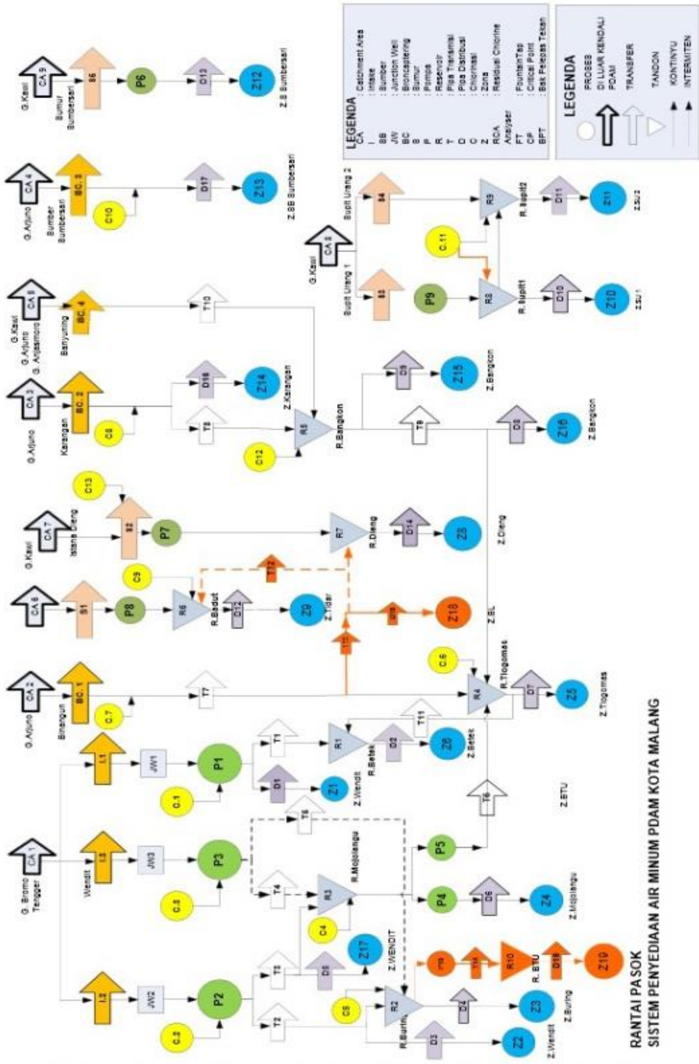
$$\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi.\,2\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \sqrt{\pi}$$

LAMPIRAN B

Rantai Pasok Sistem Penyediaan Air Bersih
PDAM Kota Malang



LAMPIRAN C

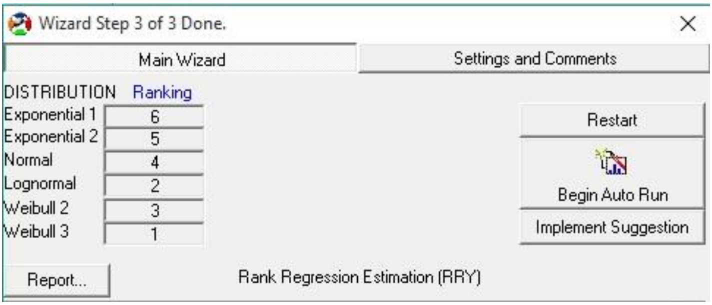
Data $\boldsymbol{t_i}$ Pompa *Submersible* Pada Rumah Pompa Wendit I PDAM Kota Malang

i	Pompa I		Pompa I		Pompa I	
	Tanggal Mati	t_i (Hari)	Tanggal Mati	t_i (Hari)	Tanggal Mati	t_i (Hari)
1	3-Jan-08	28	19-Jan-08	22	27-Jan-08	19
2	31-Jan-08	28	10-Feb-08	18	15-Feb-08	13
3	28-Feb-08	25	28-Feb-08	45	28-Feb-08	46
4	24-Mar-08	20	14-Apr-08	39	14-Apr-08	39
5	14-Apr-08	39	23-May-08	41	23-May-08	42
6	23-May-08	47	3-Jul-08	40	4-Jul-08	41
7	9-Jul-08	73	12-Aug-08	52	14-Aug-08	61
8	20-Sep-08	44	3-Oct-08	45	14-Oct-08	38
9	3-Nov-08	35	17-Nov-08	35	21-Nov-08	43
10	8-Dec-08	39	22-Dec-08	42	3-Jan-09	42
11	15-Jan-09	61	2-Feb-09	54	14-Feb-09	60
12	17-Mar-09	46	28-Mar-09	35	15-Apr-09	24
13	2-May-09	68	2-May-09	72	9-May-09	67
14	9-Jul-09	25	13-Jul-09	40	15-Jul-09	40
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
78	29-Mar-16	42	11-Apr-16	42	6-May-16	42
79	10-May-16	42	23-May-16	42	17-Jun-16	32
80	21-Jun-16	42	4-Jul-16	42	19-Jul-16	42
81	2-Aug-16	42	15-Aug-16	42	30-Aug-16	31
82	13-Sep-16	140	26-Sep-16	141	30-Sep-16	141
83	31-Jan-17		14-Feb-17		18-Feb-17	

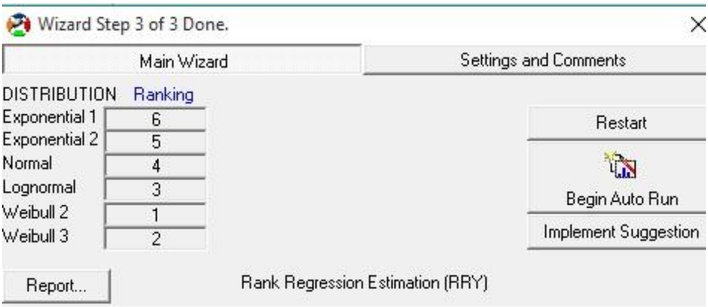
LAMPIRAN D

Hasil *Index of Fit* Menggunakan Aplikasi Weibull ++

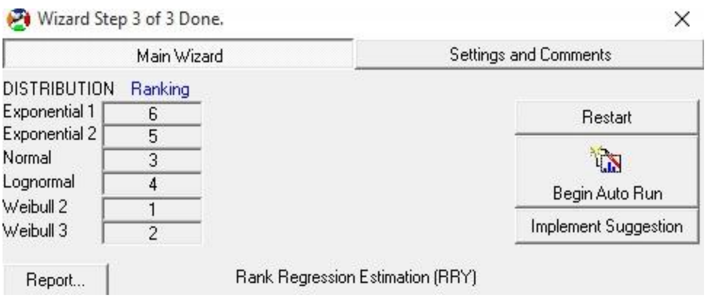
a. Pompa I



b. Pompa II



c. Pompa III



LAMPIRAN E

Penghitungan Nilai *r (Index of Fit)*

Penghitungan Uji Kecocokan Data $\boldsymbol{t_i}$ Pompa I

i	t_i	$\ln\ t_i$	$F(t_i)$	$\ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right)$	$\phi^{-1}[F(t_i)]$
1	15	2.7081	0.0085	0.0085	-2.3869
2	15	2.7081	0.0206	0.0208	-2.0409
3	17	2.8332	0.0328	0.0333	-1.8416
4	17	2.8332	0.0449	0.0459	-1.6964
5	19	2.9444	0.0570	0.0587	-1.5801
6	19	2.9444	0.0692	0.0717	-1.4820
7	20	2.9957	0.0813	0.0848	-1.3963
8	21	3.0445	0.0934	0.0981	-1.3198
9	23	3.1355	0.1056	0.1116	-1.2504
10	25	3.2189	0.1177	0.1252	-1.1865
11	25	3.2189	0.1299	0.1391	-1.1271
12	26	3.2581	0.1420	0.1531	-1.0714
13	26	3.2581	0.1541	0.1674	-1.0189
14	27	3.2958	0.1663	0.1818	-0.9690
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
71	47	3.8501	0.8580	1.9520	1.0714
72	47	3.8501	0.8701	2.0413	1.1271
73	49	3.8918	0.8823	2.1395	1.1865
74	52	3.9512	0.8944	2.2483	1.2504
75	52	3.9512	0.9066	2.3704	1.3198
76	56	4.0254	0.9187	2.5095	1.3963
77	61	4.1109	0.9308	2.6711	1.4820
78	65	4.1744	0.9430	2.8640	1.5801
79	68	4.2195	0.9551	3.1033	1.6964
80	70	4.2485	0.9672	3.4183	1.8416
81	73	4.2905	0.9794	3.8810	2.0409
82	140	4.9416	0.9915	4.7683	2.3869
Total	3315	298.0074	41	80.8599	0

Penghitungan Uji Kecocokan Data $\boldsymbol{t_i}$ Pompa II

i	t_i	$\ln\ t_i$	$F(t_i)$	$\ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right)$	$\phi^{-1}[F(t_i)]$
1	9	2.1972	0.0085	0.0085	-2.3869
2	13	2.5649	0.0206	0.0208	-2.0409
3	14	2.6391	0.0328	0.0333	-1.8416
4	15	2.7081	0.0449	0.0459	-1.6964
5	16	2.7726	0.0570	0.0587	-1.5801
6	16	2.7726	0.0692	0.0717	-1.4820
7	18	2.8904	0.0813	0.0848	-1.3963
8	20	2.9957	0.0934	0.0981	-1.3198
9	22	3.0910	0.1056	0.1116	-1.2504
10	23	3.1355	0.1177	0.1252	-1.1865
11	23	3.1355	0.1299	0.1391	-1.1271
12	25	3.2189	0.1420	0.1531	-1.0714
13	26	3.2581	0.1541	0.1674	-1.0189
14	28	3.3322	0.1663	0.1818	-0.9690
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
71	7	3.8501	0.8580	1.9520	1.0714
72	8	3.8712	0.8701	2.0413	1.1271
73	8	3.8712	0.8823	2.1395	1.1865
74	52	3.9512	0.8944	2.2483	1.2504
75	4	3.9890	0.9066	2.3704	1.3198
76	55	4.0073	0.9187	2.5095	1.3963
77	55	4.0073	0.9308	2.6711	1.4820
78	58	4.0604	0.9430	2.8640	1.5801
79	60	4.0943	0.9551	3.1033	1.6964
80	72	4.2767	0.9672	3.4183	1.8416
81	74	4.3041	0.9794	3.8810	2.0409
82	141	4.9488	0.9915	4.7683	2.3869
Total	3346	298.1382	41.0000	80.8599	0.0000

Perhiungan Uji Kecocokan Data $\boldsymbol{t_i}$ Pada Pompa III

i	t_i	$\ln\ t_i$	$F(t_i)$	$\ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right)$	$\phi^{-1}[F(t_i)]$
1	6	1.7918	0.0085	1.0086	0.0085
2	8	2.0794	0.0206	1.0211	0.0208
3	13	2.5649	0.0328	1.0339	0.0333
4	16	2.7726	0.0449	1.0470	0.0459
5	17	2.8332	0.0570	1.0605	0.0587
6	19	2.9444	0.0692	1.0743	0.0717
7	19	2.9444	0.0813	1.0885	0.0848
8	19	2.9444	0.0934	1.1031	0.0981
9	20	2.9957	0.1056	1.1180	0.1116
10	23	3.1355	0.1177	1.1334	0.1252
11	23	3.1355	0.1299	1.1492	0.1391
12	24	3.1781	0.1420	1.1655	0.1531
13	26	3.2581	0.1541	1.1822	0.1674
14	28	3.3322	0.1663	1.1994	0.1818
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
71	46	3.8286	0.8580	7.0427	1.9520
72	47	3.8501	0.8701	7.7009	2.0413
73	48	3.8712	0.8823	8.4948	2.1395
74	49	3.8918	0.8944	9.4713	2.2483
75	52	3.9512	0.9066	10.7013	2.3704
76	55	4.0073	0.9187	12.2985	2.5095
77	58	4.0604	0.9308	14.4561	2.6711
78	60	4.0943	0.9430	17.5319	2.8640
79	61	4.1109	0.9551	22.2703	3.1033
80	61	4.1109	0.9672	30.5185	3.4183
81	67	4.2047	0.9794	48.4706	3.8810
82	141	4.9488	0.9915	117.7143	4.7683
Total	3310	296.7232	41.0000	463.8448	80.8599

LAMPIRAN F

Penghitungan Uji *Mann*

Penghitungan Untuk Uji *Mann* Data $\boldsymbol{t_i}$ Pompa I

i	t_i	$\ln\ t_i$	Z_i	M_i	$\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}$
1	1	6	1.7918	-5.0999	1.1048
2	2	8	2.0794	-3.9951	0.5170
3	3	13	2.5649	-3.4781	0.3427
4	4	16	2.7726	-3.1353	0.2577
5	5	17	2.8332	-2.8777	0.2071
6	6	19	2.9444	-2.6706	0.1735
7	7	19	2.9444	-2.4971	0.1496
8	8	19	2.9444	-2.3474	0.1318
9	9	20	2.9957	-2.2157	0.1179
10	10	23	3.1355	-2.0977	0.1069
11	11	23	3.1355	-1.9909	0.0978
12	12	24	3.1781	-1.8931	0.0903
13	13	26	3.2581	-1.8027	0.0840
14	14	28	3.3322	-1.7188	0.0786
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
71	46	3.8286	0.6657	0.0447	0.4812
72	47	3.8501	0.7104	0.0469	0.4492
73	48	3.8712	0.7573	0.0495	0.4166
74	49	3.8918	0.8068	0.0527	1.1266
75	52	3.9512	0.8595	0.0568	0.9868
76	55	4.0073	0.9164	0.0622	0.8544
77	58	4.0604	0.9785	0.0693	0.4889
78	60	4.0943	1.0479	0.0796	0.2076
79	61	4.1109	1.1275	0.0957	
80	61	4.1109	1.2232	0.1249	0.7513
81	67	4.2047	1.3481	-1.3481	-0.5519
82	141	4.9488			

Penghitungan Untuk Uji Mann Data $\boldsymbol{t_i}$ Pompa II

i	t_i	$\ln\ t_i$	Z_i	M_i	$\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}$
1	9	2.197225	-5.09986	1.104754	0.332857
2	13	2.564949	-3.99511	0.517031	0.143334
3	14	2.639057	-3.47808	0.342742	0.201297
4	15	2.70805	-3.13534	0.257651	0.250488
5	16	2.772589	-2.87769	0.207076	0
6	16	2.772589	-2.67061	0.173529	0.678752
7	18	2.890372	-2.49708	0.149647	0.704061
8	20	2.995732	-2.34743	0.131782	0.723239
9	22	3.091042	-2.21565	0.11792	0.376966
10	23	3.135494	-2.09773	0.106854	0
11	23	3.135494	-1.99088	0.097822	0.852385
12	25	3.218876	-1.89306	0.090312	0.43428
13	26	3.258097	-1.80274	0.083974	0.882506
14	28	3.332205	-1.71877	0.078557	0.446697
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
71	47	3.850148	0.66573	0.044696	0.471035
72	48	3.871201	0.710426	0.046867	0
73	48	3.871201	0.757293	0.049499	1.617042
74	52	3.951244	0.806793	0.052746	0.715511
75	54	3.988984	0.859539	0.05684	0.322818
76	55	4.007333	0.916379	0.062159	0
77	55	4.007333	0.978538	0.069349	0.765836
78	58	4.060443	1.047887	0.079639	0.425689
79	60	4.094345	1.127526	0.095709	
80	72	4.276666	1.223235	0.124877	0.219408
81	74	4.304065	1.348111	-1.34811	-0.47822
82	141	4.94876			

Penghitungan Untuk Uji *Mann* Data $\boldsymbol{t_i}$ Pompa III

i	t_i	$\ln\ t_i$	Z_i	M_i	$\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}$
1	6	1.7918	-5.0999	1.1048	0.2604
2	8	2.0794	-3.9951	0.5170	0.9390
3	13	2.5649	-3.4781	0.3427	0.6058
4	16	2.7726	-3.1353	0.2577	0.2353
5	17	2.8332	-2.8777	0.2071	0.5371
6	19	2.9444	-2.6706	0.1735	0.0000
7	19	2.9444	-2.4971	0.1496	0.0000
8	19	2.9444	-2.3474	0.1318	0.3892
9	20	2.9957	-2.2157	0.1179	1.1852
10	23	3.1355	-2.0977	0.1069	0.0000
11	23	3.1355	-1.9909	0.0978	0.4351
12	24	3.1781	-1.8931	0.0903	0.8863
13	26	3.2581	-1.8027	0.0840	0.8825
14	28	3.3322	-1.7188	0.0786	0.0000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
71	46	3.8286	0.6657	0.0447	0.4812
72	47	3.8501	0.7104	0.0469	0.4492
73	48	3.8712	0.7573	0.0495	0.4166
74	49	3.8918	0.8068	0.0527	1.1266
75	52	3.9512	0.8595	0.0568	0.9868
76	55	4.0073	0.9164	0.0622	0.8544
77	58	4.0604	0.9785	0.0693	0.4889
78	60	4.0943	1.0479	0.0796	0.2076
79	61	4.1109	1.1275	0.0957	
80	61	4.1109	1.2232	0.1249	0.7513
81	67	4.2047	1.3481	-1.3481	-0.5519
82	141	4.9488			

LAMPIRAN G

Penghitungan Uji Kolmogorov-Smirnov Pada Pompa I

i	t_i	$\ln t_i$	$\frac{(i-1)}{82}$	$\frac{i}{82}$	$\ln t_i - \bar{t}$	Kumulative	$\phi\left(\frac{(\ln t_i - \bar{t})}{s}\right)$	D1	D2	$(\ln t_i - \bar{t})$	$\left(\frac{(\ln t_i - \bar{t})}{s}\right)$
1	15	2.708	0.000	0.012	-0.926	-2.098	0.018	0.018	-0.006	0.858	-2.098
2	15	2.708	0.012	0.024	-0.926	-4.196	0.018	0.006	0.006	0.858	-2.098
3	17	2.833	0.024	0.037	-0.801	-6.010	0.035	0.010	0.002	0.642	-1.814
4	17	2.833	0.037	0.049	-0.801	-7.824	0.035	-0.002	0.014	0.642	-1.814
5	19	2.944	0.049	0.061	-0.690	-9.387	0.059	0.010	0.002	0.476	-1.562
6	19	2.944	0.061	0.073	-0.690	-10.949	0.059	-0.002	0.014	0.476	-1.562
7	20	2.996	0.073	0.085	-0.639	-12.395	0.074	0.001	0.011	0.408	-1.446
8	21	3.045	0.085	0.098	-0.590	-13.731	0.091	0.005	0.007	0.348	-1.336
9	23	3.135	0.098	0.110	-0.499	-14.860	0.129	0.032	-0.020	0.249	-1.130
10	25	3.219	0.110	0.122	-0.415	-15.801	0.173	0.064	-0.051	0.173	-0.941
11	25	3.219	0.122	0.134	-0.415	-16.742	0.173	0.051	-0.039	0.173	-0.941
12	26	3.258	0.134	0.146	-0.376	-17.594	0.197	0.063	-0.051	0.141	-0.852
13	26	3.258	0.146	0.159	-0.376	-18.446	0.197	0.051	-0.039	0.141	-0.852
14	27	3.296	0.159	0.171	-0.338	-19.212	0.222	0.063	-0.051	0.115	-0.766
?											
26	39	3.664	0.305	0.317	0.029	-24.230	0.526	0.222	-0.209	0.001	0.066
72	47	3.850	0.866	0.878	0.216	-12.373	0.688	-0.178	0.190	0.047	0.489
79	68	4.220	0.951	0.963	0.585	-5.839	0.908	-0.044	0.056	0.343	1.326
80	70	4.248	0.963	0.976	0.614	-4.448	0.918	-0.045	0.058	0.377	1.391
81	73	4.290	0.976	0.988	0.656	-2.961	0.931	-0.044	0.056	0.431	1.486
82	140	4.942	0.988	1.000	1.307	0.000	0.998	0.011	0.002	1.709	2.961

LAMPIRAN H

Niai Kritis Uji *Mann*

		K1																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
K2	1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	1.71	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	2.23	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	3.22	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	4.62	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	5.86	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	5.86	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	8.70	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	8.70	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	8.70	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	19.43	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	19.43	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	19.43	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	19.43	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	19.43	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	19.43	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	19.43	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	19.43	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	19.43	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	19.43	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	19.43	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	19.43	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	19.43	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	19.43	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	19.43	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	19.43	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	19.43	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	19.43	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
	50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	19.43	1.78	1.74	1.69	1.63	1.58	1.51
	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	245.95	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47
	100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	245.95	1.68	1.63	1.57	1.52	1.45	1.38
	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	245.95	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35

LAMPIRAN I

Nilai Kritis Uji *Kolmogorov Smirnov*

n\α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,359	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,486
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381
18	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371
19	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361
20	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
23	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
25	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
27	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
28	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
29	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
30	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
40	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252
50	0,148	0,170	0,188	0,211	0,226
60	0,136	0,155	0,172	0,193	0,207
70	0,126	0,144	0,160	0,179	0,192
80	0,118	0,135	0,150	0,167	0,179
90	0,111	0,127	0,141	0,158	0,169
100	0,106	0,121	0,134	0,150	0,161
Pendekatan	1,07/√n	1,22/√n	1,36/√n	1,52/√n	1,63/√n

LAMPIRAN J

Estimasi Parameter dan Reliabilitas Distribusi Weibull

I. Menentukan Fungsi *Likelihood*

Fungsi *Likelihood* didapatkan dengan mensubsitusikan fungsi padat peluang dari distribusi Weibull (2.7) pada fungsi *Likelihood* di mana $0 < i \leq n$ yang diperoleh dari persamaan (2.11):

$$L(\theta, \beta|\mathrm{T}) = f(T|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i)$$

$$= \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (t_i)^{\beta-1} \ e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i{}^{\beta}}{\theta}}$$

II. Menentukan Distribusi Prior

Distribusi prior dapat diperoleh dengan mendapatkan nilai diferensial pertama dan diferensial kedua dari log fungsi padat peluang distribusi Weibull terlebih dahulu, yang mana untuk setiap $0 < i \leq n$.

$$\log f(\mathrm{t}) = \log\left[\frac{\beta}{\theta} t^{\beta-1} e^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}}\right]$$

$$= -\log\theta + \log\beta + \beta\log t - \frac{t^{\beta}}{\theta}\log e - \log t$$

$$\frac{\partial \log f(\mathrm{t})}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\log\theta + \log\beta + \beta\log t - \frac{t^{\beta}}{\theta}\log e - \log t\right]$$

$$= -\frac{1}{\theta} + \frac{t^{\beta}}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(\mathrm{t})}{\partial{\theta_2}^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{\theta} + \frac{t^{\beta}}{\theta^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2t^{\beta}}{\theta^3}$$

Sehingga diperoleh Informasi Fisher sebagai berikut:

$$\mathrm{I}(\theta) = -\,nE\left[\frac{\partial^2 \log f(\mathrm{t})}{\partial\theta^2}\right]$$

$$= -n\,E\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2t^\beta}{\theta^3}\right]$$

$$= -n\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2t^\beta}{\theta^3}\right)\frac{\beta}{\theta}{t_i}^{\beta-1}e^{-\frac{t^\beta}{\theta}}\ \ dt\right)$$

$$= -2n\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^2}\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}e^{-\frac{t^\beta}{\theta}}\ \ dt - 2\int_0^{\infty}\left(\frac{t^\beta}{\theta^3}\right)\frac{\beta}{\theta}{t_i}^{\beta-1}e^{-\frac{t^\beta}{\theta}}\ \ dt\right)$$

$$= -2n\left(\int_0^{\infty}\frac{\beta}{\theta^3}t^{\beta-1}e^{-\frac{t^\beta}{\theta}}\ \ dt_i - 2\int_0^{\infty}\left(\frac{t^\beta}{\theta^3}\right)\frac{\beta}{\theta}{t_i}^{\beta-1}e^{-\frac{t^\beta}{\theta}}\ \ dt\right)$$

Misalkan : $\frac{t^\beta}{\theta} = u \rightarrow t^\beta = u\theta \rightarrow t = \ (u\theta)^{\frac{1}{\beta}}$

$$dt = \frac{1}{\beta}u^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}\ (\theta)^{\frac{1}{\beta}}du$$

Batas atas dan batas bawahnya tetap

$$t = 0 \rightarrow u = 0$$

$$t = \infty \rightarrow u = \infty$$

$$\mathrm{I}(\theta) = -2n\left(\int_0^{\infty}\frac{\beta}{\theta^3}\ (u\theta)^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}e^{-\mathrm{u}}\ \ \frac{1}{\beta}u^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}\ (\theta)^{\frac{1}{\beta}}du\right) +$$

$$4n\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{u}}{\theta^2}\right)\frac{\beta}{\theta}\ (u\theta)^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}e^{-\mathrm{u}}\ \frac{1}{\beta}u^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}\ (\theta)^{\frac{1}{\beta}}du\right)$$

$$= -2n\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^2}e^{-\mathrm{u}}\ \ du\right) + 4n\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{u}}{\theta^2}\right)e^{-\mathrm{u}}\,du\right)$$

$$= -2n\left(\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\infty}\mathrm{u}^0e^{-\mathrm{u}}\ \ du\right) + 4n\left(\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\infty}u\ e^{-\mathrm{u}}\,du\right)$$

Dengan menggunakan persamaan fungsi gamma (2.16), dapat diketahui bahwa:

- Untuk $z - 1 = 0 \rightarrow z = 1$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{u}^0\, e^{-\mathrm{u}}\, du$$

Berdasarkan **Lemma 2.3** diperoleh $\Gamma(1) = 1$

- Untuk $z - 1 = 1 \rightarrow z = 2$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty \mathrm{u}^1\, e^{-\mathrm{u}}\, du$$

Berdasarkan **Lemma 2.1** diperoleh $\Gamma(2) = (2-1)! = 1$

Sehinggai informasi fisher yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\theta) &= -2n\left(\frac{1}{\theta^2}\right) + 4n\left(\frac{1}{\theta^2}\right) \\ &= \frac{2n}{\theta^2} \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \sqrt{\mathrm{I}(\theta)} = \sqrt{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}\sqrt{2n}$$

Sedangkan prior bersama dengan $g(\beta) \propto c$ diperoleh distribusi prior:

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= f(\theta)g(\,\beta) \\ &= \frac{1}{\theta}\sqrt{2n} \times c \propto \frac{1}{\theta}\sqrt{2n} \end{aligned}$$

III. Menentukan Distribusi Posterior Distribusi Weibull

Distribusi posterior distribusi dari θ diperoleh dengan mensubsitusikan fungsi *Likelihood* dan distribusi prior yang telah diperoleh pada persamaan (2.14) sebagai berikut, di mana $0 < i \leq n$:

$$\pi(\theta,\beta|T) = \frac{\sqrt{2n}\left(\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}(t_i)^{\beta-1}\ e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i{}^{\beta}}{\theta}}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{2n}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}(t_i)^{\beta-1}\ e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i{}^{\beta}}{\theta}}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)d\theta\right]d\beta}$$

Misalkan :

$\prod_{i=1}^{n} t_i = \rho$ dan $\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta} = \omega$

sehingga diperoleh :

$$\pi(\theta,\beta|T) = \frac{\left(\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\right)}{\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\,d\theta\ \right]d\beta}$$

$$\pi(\theta|T) = K^{-1}\left(\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\right)$$

di mana $K = \int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^n}{\theta^{n+1}}\rho^{\beta-1}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\,d\theta\ \right]d\beta$

$$K = \int_0^{\infty}\beta^n\rho^{\beta-1}\left[2\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^{n+1}}\ e^{-\frac{\omega}{\theta}}\,d\theta\ \right]d\beta$$

Misalkan : $\frac{\omega}{\theta} = p \rightarrow \theta = \frac{\omega}{p}$

$$d\theta = \frac{-\omega}{p^2}dp$$

Batas atas dan batas bawahnya berubah menjadi :

$\theta = 0 \rightarrow\ p = \infty$

$\theta = \infty \rightarrow\ p = 0$

Sehingga diperoleh:

$$K = \int_0^{\infty}\beta^n\rho^{\beta-1}\left[-2\int_{\infty}^{0}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{p}\right)^{n+1}}\ e^{-p}\ \frac{\omega}{p^2}\ dp\right]d\beta$$

$$K = \int_0^{\infty}\beta^n\rho^{\beta-1}\left[2\int_0^{\infty}\frac{p^n}{\omega^n}\ e^{-p}\,\frac{1}{p}\ dp\ \right]d\beta$$

$$K = \int_0^\infty \beta^n \rho^{\beta-1} \frac{1}{\omega^n} \left[2 \int_0^\infty p^{n-1}\ e^{-p}\ dp \right] d\beta$$

Dengan menggunakan persamaan fungsi gamma (2.16), dari dapat kita ketauhui :

- Untuk $z - 1 = n - 1 \rightarrow z = n$ sehingga diperoleh

  $$\Gamma(n) = \int_0^\infty (p)^{n-1}\ e^{-p}\ dp$$

sehingga diperoleh,

$$K = 2 \int_0^\infty \beta^n \rho^{\beta-1} \frac{1}{\omega^n}\ \Gamma(n) d\beta$$

$$K = 2\ \Gamma(n) \int_0^\infty \beta^n \rho^{\beta-1} \frac{1}{\omega^n} d\beta$$

Dengan $\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta} = \omega$ diperoleh

$$K = 2\Gamma(n) \int_0^\infty \beta^n \rho^{\beta-1} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta} \right)^n d\beta$$

LAMPIRAN K

Transformasi Univariate dari Distribusi Weibull ke Distribusi Eksponensial

I. Transaformasi Fungsi Padat Peluang Distribusi Weibull Ke Distribusi Eksponensial

Hal pertama yang dilakukan adalah melakukan transformasi terhadap t^{β} berdasarkan fungsi padat peluang distribusi Weibull (2.7) sehingga diperoleh invers sebagai berikut:

Misalkan $y = t^{\beta}$

$$y^{\frac{1}{\beta}} = t \rightarrow g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\beta}}$$

Jika $f(t)$ merupakan fungsi padat peluang distribusi Weibull (2.7), dan $\frac{1}{\theta} = \varphi$ sehingga diperoleh :

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = \beta\varphi\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta-1} e^{-\varphi\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}}$$

$$= \beta\varphi y^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} e^{-\varphi y}$$

Sedangkan turunan dari $g^{-1}(y)$ diperoleh :

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right| = \frac{1}{\beta} y^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}$$

Sehingga transformasi :

$$f(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right|$$

$$= \left(\beta\varphi y^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} e^{-\varphi y}\right)\left(\frac{1}{\beta} y^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}\right)$$

$$= \left(\varphi e^{-\varphi y}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y}\right)$$

II. Menentukan Fungsi *Likelihood*

Mendapatkan fungsi *Likelihood* dengan persamaan (2.13), sehingga diperoleh :

$$L(\theta|y_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y_i}\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

III. Menentukan Distribusi Prior

Untuk mendapatkan distribusi prior akan dicari diferensil pertama dan diferensial kedua dari log fungsi peluang kepadatan eksponensial untuk setiap $0 < i \leq n$.

$$\log f(y) = \log\left[\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}\right]$$

$$= \log\frac{1}{\theta} + \log e^{-\frac{1}{\theta}y}$$

$$= \log\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}y$$

$$\frac{\partial \log f(y)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\log\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}y\right]$$

$$= \theta + \frac{1}{\theta^2}y$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(y)}{\partial{\theta_2}^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\theta + \frac{1}{\theta^2}y\right]$$

$$= -\frac{1}{\theta^3}y$$

Berdasarkan definisi distribusi prior non informative, perlu diketahui terlebih dahulu informasi fisher (2.14) sebagai berikut :

$$\mathrm{I}(\theta) = -nE\left[-\frac{1}{\theta^3}y\right]$$

$$= n\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^3}y\right)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}\ dy\right)$$

$$= 2n \int_0^\infty \frac{1}{\theta^4} y e^{-\frac{y}{\theta}} \ dy$$

Misalkan : $\frac{y}{\theta} = u \rightarrow y = u\theta$

$$dy = \theta du$$

Batas atas dan batas bawahnya tetap

$y = 0 \rightarrow u = 0$

$y = \infty \rightarrow u = \infty$

diperoleh :

$$\mathrm{I}(\theta) = 2n \int_0^\infty \frac{1}{\theta^4} u\theta e^{-u} \theta du]$$

$$= 2n \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} u e^{-u} \, du$$

$$= 2n \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty u e^{-u} \, du$$

Dengan menggunakan persamaan fungsi gamma (2.16), dapat diketahui :

- Untuk $z - 1 = 1 \rightarrow z = 2$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty u^1 \, e^{-u} \, du$$

Berdasarkan **Lemma 2.1** diperoleh $\Gamma(2) = (2-1)! = 1$

$$\mathrm{I}(\theta) = 2n \frac{1}{\theta^2} \Gamma(2)$$

$$= \frac{2n}{\theta^2}$$

Karena distribusi eksponensial memiliki 1 parameter diperoleh

$$\pi(\theta) = \sqrt{\mathrm{I}(\theta)} = \sqrt{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{\sqrt{2n}}{\theta}$$

IV. Menentukan Distribusi Posterior

Distribusi posterior distribusi dari θ diperoleh dengan mensubsitusikan fungsi *Likelihood* dan distribusi prior yang telah diperoleh pada persamaan (2.15) sebagai berikut, di mana $0 < i \leq n$:

$$\pi(\theta|T) = \frac{\sqrt{2n}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right) d\theta}$$

Misalkan $\sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda$

$$\pi(\theta|T) = \frac{\left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\right) d\theta}$$

$$\pi(\theta|T) = K^{-1}\left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\right)$$

Di mana

$$K = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\right) d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\right) d\theta$$

Misalkan : $\frac{\lambda}{\theta} = u \rightarrow \theta = \frac{\lambda}{u}$

$$d\theta = \frac{-\lambda}{u^2} du$$

Batas atas dan batas bawahnya berubah

$\theta = 0 \rightarrow u = \infty$

$\theta = \infty \rightarrow u = 0$

Sehingga diperoleh :

$$K = 2\int_{\infty}^{0}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n+1} e^{-u}\left(\frac{-\lambda}{u^2}\right) du$$

$$= 2\int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n+1} e^{-u} \left(\frac{\lambda}{u^2}\right) du$$

$$= \frac{2}{\lambda^n}\int_0^\infty (u)^{n-1} e^{-u}\, du$$

Dengan menggunakan persamaan fungsi gamma (2.16), dapat diketahui :

- Untuk $z - 1 = n - 1 \rightarrow z = n$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty (u)^{n-1}\, u\, du$$

$$K = \frac{2}{\lambda^n}\Gamma(n)$$

$$\pi(\theta|T) = \frac{\lambda^n \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)} = \lambda^n \frac{\left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)}$$

V. Menentukan Model Estimasi Reliabilitas

Selanjutnya, menentukan model reliabilitas menggunakan metode *Bayes* dengan mensubsitusikan fungsi reliabilitas eksponensial (2.6) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut :

$$R(t)^* = E(R(t)|T)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y}{\theta}} \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^n \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)} d\theta$$

$$= \frac{2\,(\sum_{i=1}^n y_i)^n}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{(\sum_{i=1}^n y_i)+y}{\theta}} d\theta$$

Misalkan : $\frac{(\sum_{i=1}^n y_i)+y}{\theta} = u \rightarrow \theta = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)+y}{u}$

$$d\theta = \frac{-\left((\sum_{i=1}^n y_i) + y\right)}{u^2} du$$

Batas atas dan batas bawahnya berubah

$$\theta = 0 \rightarrow u = \infty$$

$\theta = \infty \rightarrow \ u = 0$

$$R(t)^* = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^n}{\Gamma(n)} \int_{\infty}^{0} \frac{1}{\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i) + y}{u}\right)^{n+1}} e^{-u} \frac{-((\sum_{i=1}^{n} y_i) + y)}{u^2} du$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^n}{\left((\sum_{i=1}^{n} y_i) + y\right)^n \Gamma(n)} \int_{0}^{\infty} (u)^{n-1} e^{-u} du$$

Dengan menggunakan persamaan fungsi gamma (2.16), dapat diketahui :

- Untuk $z - 1 = n - 1 \rightarrow z = n$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} (u)^{n-1}\, u\, du$$

Sehingga diperoleh :

$$R(t)^* = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^n}{\left((\sum_{i=1}^{n} y_i) + y\right)^n \Gamma(n)} \ \Gamma(n)$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^n}{\left((\sum_{i=1}^{n} y_i) + y\right)^n}$$

Karena $y = \ {t_i}^{\beta}$ diperoleh Model estimasi Reliabilitasnya sebgai berikut:

$$R(t)^* = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^n}{\left((\sum_{i=1}^{n} \ {t_i}^{\beta}) + \ t^{\beta}\right)^n}$$

LAMPIRAN L

Estimasi Parameter β Menggunakan *OpenBugs*

I. Algoritma OpenBugs Pompa I

```
MODEL{

#FUNGSI LIKELIHOOD
for ( i in 1:41) {
                    for (j in 1:2){
                              t [ i , j ] ~ dweib (beta,teta)
}}

#PRIOR PARAMETER TETA
teta~dexp(0.001)

#PRIOR PARAMETER BETA
beta ~ dgamma(0.01, 0.001)
}

DATA
list(t=structure(.Data=c(28,28,25,20,39,47,73,44,35,39,61,4
6,68,25,33,45,65,42,32,26,32,52,41,17,41,43,41,43,41,45,43
,29,27,23,39,42,52,40,39,40,43,15,70,44,42,43,28,43,42,42,
44,56,19,49,36,44,42,42,45,43,26,17,31,42,19,21,43,41,45,1
5,29,42,42,47,40,42,42,42,42,42,42,140), .Dim=c(41,2)))

INITS
        list(teta=0.01, beta=0.01)
```

II. Algoritma OpenBugs Pompa II

```
MODEL{

#FUNGSI LIKELIHOOD
for ( i in 1:41) {
                  for (j in 1:2){
                           t [ i , j ] ~ dweib (beta,teta)
}}

#PRIOR PARAMETER TETA
teta~dexp(0.001)

#PRIOR PARAMETER BETA
beta ~ dgamma(0.01, 0.001)
}

DATA
list(t=structure(.Data=c(22,18,45,39,41,40,52,45,35,42,54,3
5,72,40,37,45,48,55,16,23,45,45,45,25,45,43,41,42,47,43,41
,20,13,29,42,43,58,40,23,55,37,42,42,42,44,42,35,40,42,39,
42,60,47,35,44,45,15,41,48,42,
26,31,43,28,14,9,42,42,43,16,41,42,45,42,42,42,42,42,42,42
,42,141), .Dim=c(41,2)))

INITS
list(teta=0.01, beta=0.01)
```

III. Algoritma OpenBugs Pompa III

```
MODEL{

#FUNGSI LIKELIHOOD
for ( i in 1:41) {
        for (j in 1:2){
                t [ i , j ] ~ dweib (beta,teta)
        }
}

#PRIOR PARAMETER TETA
teta~dexp(0.001)

#PRIOR PARAMETER BETA
beta ~ dgamma(0.01, 0.001)
}

DATA
list(t=structure(.Data=c(19,13,46,39,42,41,61,38,43,42,60,2
4,67,40,43,43,55,52,23,6,45,48,46,28,40,44,45,40,58,45,28,
23,19,28,42,42,61,43,16,46,39,45,42,42,49,43,41,43,42,42,4
1,42,47,42,42,39,26,42,43,42,17,38,42,20,19,42,41,45,8,36,
42,45,39,44,42,43,41,42,32,42,31,141), .Dim=c(41,2)))

INITS
list(teta=0.01, beta=0.01)
```

IV. *Node Stat* Sebagai Output dari Algoritma

(a) Node Stat Pompa I

	mean	sd	MC_error	val2.5pc	median	val97.5pc	start	sample
beta	2.325	0.1678	0.002199	1.995	2.325	2.655	501	399500

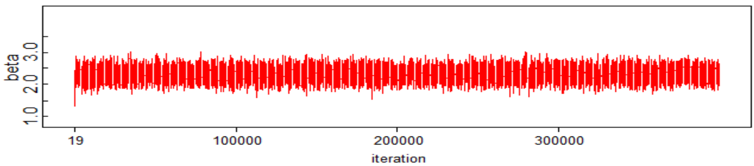
(b) Node Stat Pompa II

	mean	sd	MC_error	val2.5pc	median	val97.5pc	start	sample
beta	2.349	0.1699	0.002046	2.017	2.348	2.683	501	499500

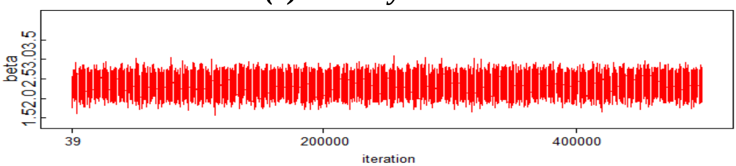
(c) Node Stat Pompa III

	mean	sd	MC_error	val2.5pc	median	val97.5pc	start	sample
beta	2.321	0.1697	0.002309	1.994	2.319	2.658	501	399500

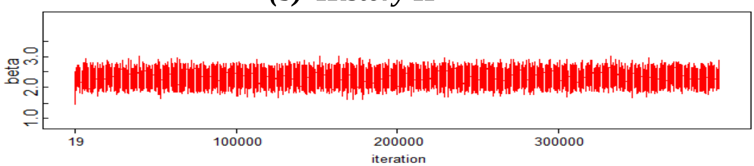
V. *Trace Plot* Berdasarkan Sebagai Output dari Algoritma



(a) History I



(b) History II



(c) History III

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Widya Arrya Septiana, lahir di Bondowoso , 5 September 1994. Ia merupakan anak pertama dari Bapak Heri Winarno dan Ibu Yuli Artatik. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari TK At-Taqwa (1999-2001), SDN Kota Kulon 1Bondowoso (2001-2007), SMP Negeri 1 Bondowoso (2007-2010), SMA Negeri 2 Bondowoso (2010-2013). Setelah lulus dari SMA Negeri 2 Bondowoso melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS pada tahun 2012-sekarang melalui jalur SNMPTN tahun 2013, Jurusan Matematika ITS. Penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui MAHAGANA ITS (Mahasiswa Penanggulangan Bencana ITS) menjabati staff pada masa jabatan 2014-15 dan menjabat sebagai bendahara umum MAHAGANA ITS pada 2015 - 2016. Selain itu penulis juga pernah mengikuti serankaian kepanitian, yaitu sebagai anggota divisi pelatihan pada acra ITS Mengajar For Indonesia 2014 di pulau Mandangin. Sebagai annggota divisi kestari pada OMITS 2015 dan koordinator kestari pada OMITS 2016. Serta beberapa pelatihan sekala internal ITS, lokal maupun nasional. Hal – hal yang perlu didiskusikan mengenai penelitian ini dapat didiskusikan melalui email penulis yaitu widya.arrya@gmail.com.